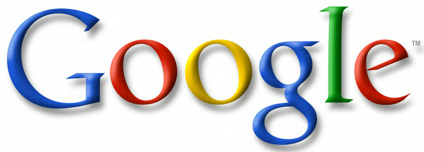


This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

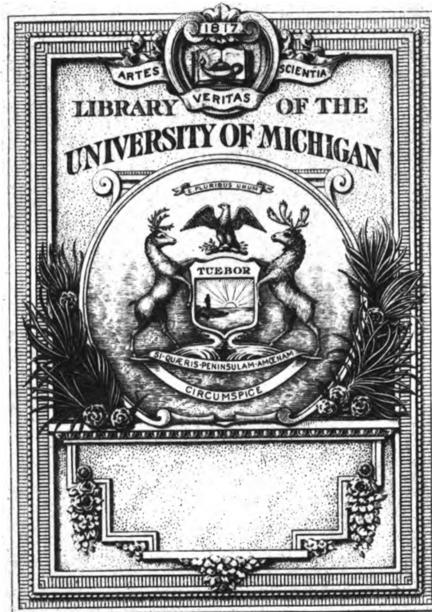
Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at http://books.google.com/

B 49472 6

Over asymptotische ontwikkelingen

G. C. A. Valewink

Digitized by Google



THE GIFT OF
Prof. Walter B. Ford

Digitized by Google

Mathematics
QA
295
.V15

H. B. Ford
Oct. 6, 1909.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

OVER ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN.

Digitized by Google

OVER ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN

PROEFSCHRIFT

TER VERKRIJGING VAN DEN GRAAD

VAN

DOCTOR IN DE WIS- EN NATUURKUNDE

AAN DE RIJKS-UNIVERSITEIT TE UTRECHT

NA MACHTIGING VAN DEN RECTOR MAGNIFICUS

DR. J. M. S. BALJON

HOOGLEERAAR IN DE FACULTEIT DER GODGELEERDHEID

VOLGENS BESLUIT VAN DEN SENAAT DER UNIVERSITEIT

TEGEN DE BEDENKINGEN VAN DE

FACULTEIT DER WIS- EN NATUURKUNDE

TE VERDEDIGEN

OP WOENSDAG 1 MAART 1905, DES NAMIDDAGS TEN 4 URE

DOOR

GERRIT CORNELIS AUGUST VALEWINK

GEBOREN TE AMERSFOORT

HAARLEM
DE ERVEN LOOSJES
1905

Digitized by Google

Aan mijne Vrouw.

Digitized by Google

Digitized by Google

Aan het einde van dit proefschrift gekomen, is het mij eene aangename taak U, Hoogleeraren in de Faculteit der Wis- en Natuurkunde, die tot mijne vorming hebben bijgedragen, mijn dank te betuigen.

Inzonderheid geldt die dank U, Hooggeleerde Kapteyn. Uwe welwillendheid en belangstelling, Hooggeachte Promotor, zullen mij steeds in aangename herinnering blijven.

U, Hooggeleerde Julius, de Vries en Nyland mijn dank voor de hulp, die, wanneer ik ze ook inriep, mij steeds door U werd verleend.

Digitized by Google

Digitized by Google

INHOUD.

Blz.

INLEIDING 1

HOOFDSTUK I. Oudste onderzoekingen.

I. LA PLACE 3
II. CAUCHY 5

HOOFDSTUK II. Ontwikkeling in reeksen.

I. Methode van STIELTJES 11
II. Toepassing op li-functie 17

HOOFDSTUK III. Definitie van POINCARÉ. Bewerkingen en Toepassingen.

I. Definitie 36
II. Bewerkingen 38
III. Toepassingen 51

HOOFDSTUK IV. Bepaling van sommige asymptotische ontwikkelingen door middel van een differentiaalvergelijking 67

HOOFDSTUK V. Toepassing op differentiaalvergelijkingen 74

HOOFDSTUK VI. Vervolg.

I. Methode van KNESER 101
II. „ „ HORN 108
III. „ „ JACOBSTHAL 115
IV. Voorbeelden 118

NOOT I 130
NOOT II 134
NOOT III 136
NOOT IV 137

STELLINGEN 139

Digitized by Google

Digitized by Google

INLEIDING.

---

1. De Euler Mac-Laurinsche sommatie-formule is:

$$h\sum_{\nu=0}^{p-1} f(a+\nu h) = \int_a^{a+ph} f(x)\,dx - \frac{h}{2}\,\{f(a+ph) - f(a)\} +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\,\frac{B_\nu h^{2\nu}}{(2\nu)!}\,\{f^{2\nu-1}(a+ph) - f^{2\nu-1}(a)\} + R_{2n+1} \ldots \quad (1)$$

waar de B's de Bernoulliaansche getallen voorstellen, n.l.
$B_1 = \frac{1}{6}$; $B_2 = \frac{1}{30}$; $B_3 = \frac{1}{42}$ enz.

R_{2n+1} stelt de restterm voor, die verschillende vormen kan krijgen (zie Noot I).

Wanneer nu in formule (1), die voor elke waarde van n geldt:

$$\lim_{n=\infty} R_{2n+1} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

wordt, dan gaat 't tweede lid voor $\lim n = \infty$ over in een convergente reeksontwikkeling, wier som volkomen overeenstemt met de waarde van het eerste lid. Dit is echter in den regel niet het geval.

2. Soms bezit R_{2n+1} de eigenschap, met toenemende waarden van n eerst af te nemen en voor een bepaalde waarde n_1 van n eene (betrekkelijk zeer kleine) minimum-waarde te krijgen, zoodat dan de reeks:

$$\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{\nu-1}\,\frac{B_\nu h^{2\nu}}{(2\nu)!}\,\{f^{2\nu-1}(a+ph) - f^{2\nu-1}(a)\} + R_{2n+1} \;\ldots \quad (3)$$

bij toenemende waarde van n tot n_1 toe, ook met toenemende nauwkeurigheid de waarde van het eerste lid aangeeft.

Digitized by Google

Wordt n grooter genomen dan n_1, dan wordt R_{2n+1} weer grooter en reeks (3) geeft dan de waarde van het eerste lid met des te minder nauwkeurigheid aan, naarmate men n laat toenemen.

3. LEGENDRE noemde deze reeksen semi-convergent (de semi-convergentie werd 't eerst ontdekt door EULER) en STIELTJES heeft dezen naam behouden voor de door hem onderzochte ontwikkelingen.

Semi-convergente reeksen zijn dus zulke divergente reeksen, waarbij de som van een behoorlijk (eindig) aantal termen de waarde van een gegeven uitdrukking, met betrekkelijk groote benadering, aangeeft. Deze benadering is niet, zooals bij convergente reeksen, zoo nauwkeurig als men wil, doch is door den aard van de reeks beperkt.

Voor rekenkundige berekening is de theoretisch *willekeurig groote* benadering door convergente reeksen niet van zóoveel belang als de *betrekkelijk groote* benadering door semi-convergente reeksen.

4. Zeer belangrijke semi-convergente reeksen worden uit (1) gevonden, zooals b. v. b. de voorstelling van:

$$\sum_{\nu=0}^{p-1} \log (x + \nu h) \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (4)$$

die uit (1) te verkrijgen is door $f(x)$ te vervangen door $\log x$. Deze reeks werd reeds door STIRLING behandeld, vóordat formule (1) bekend was.

Gewoonlijk noemt men de semi-convergente uitdrukking voor

$$\sum_{\nu=1}^{p} \log \nu$$

of wel die, voor de meer algemeene vorm:

$$\log \Gamma (x + 1)$$

de formule van STIRLING.

Digitized by Google

HOOFDSTUK I.

OUDSTE ONDERZOEKINGEN.

I. LAPLACE.

1. LAPLACE maakt in zijn „Théorie analytique des probabilités" (1812) gebruik van eenige reeksen, die in hunne eerste termen zeer snel convergeeren, wier convergentie vermindert en eindigt met over te gaan in divergentie. Dit is echter geen beletsel voor 't gebruik van die reeksen, want, wanneer de eerste termen genomen worden, waarbij de convergentie snel is, krijgt men een rest, die verwaarloosd mag worden. Deze rest toch is de ontwikkeling van een algebraïsche functie of van een integraal, waarvan de waarde zeer klein is in betrekking tot 't geen voorafgaat.

2. Als voorbeeld beschouwen we de ontwikkeling in een reeks van de integraal:

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt$$

waarvan LAPLACE de afleiding niet geeft.

$\int e^{-t^2}\,dt$ kan op verschillende wijzen ontwikkeld worden. Om tot den vorm van LAPLACE te komen gaan we op de volgende wijze te werk:

Stel

$$e^{-t^2}=p \quad \text{dus} \quad dt=\frac{i}{2}\,\frac{dp}{p\sqrt{\log p}} \quad ; \; t=i\sqrt{\log p}$$

Digitized by Google

Er komt dan:

$$\int e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\,i\int\frac{p\,dp}{p\sqrt{\log p}} = \frac{1}{2}\,i\int\frac{dp}{\sqrt{\log p}} =$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{p}{\sqrt{\log p}} + \frac{i}{4}\int\frac{dp}{(\log p)^{3/2}} =$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{p}{\sqrt{\log p}} + \frac{i}{4}\,\frac{p}{(\log p)^{3/2}} + \frac{3}{2}\cdot\frac{i}{4}\int\frac{dp}{(\log p)^{5/2}} =$$

$$= \frac{i}{2}\,\frac{p}{(\log p)^{1/2}} + \frac{i}{2^2}\cdot\frac{p}{(\log p)^{3/2}} + \frac{3.\,i}{2^3}\,\frac{p}{(\log p)^{5/2}} + \frac{3.\,5.\,i}{2^4}\,\frac{p}{(\log p)^{7/2}} + \ldots =$$

$$= -\frac{e^{-t^2}}{2t}\left\{1 - \frac{1}{2t^2} + \frac{1.\,3}{2^2\,t^4} - \frac{1.\,3.\,5}{2^3\,t^6} + \ldots\right\} \;\ldots\ldots \quad (1)$$

Voor de grenzen T en ∞ komt er dus:

$$\int_T^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-T^2}}{2\,T}\left\{1 - \frac{1}{2\,T^2} + \frac{1.\,3}{2^2\,T^4} - \frac{1.\,3.\,5}{2^3\,T^6} + \text{enz.}\right\}. \quad (2)$$

Deze reeks is divergent, hoe groot ook de waarde is, die men aan T toekent; men kan echter, zonder merkbare fout de eerste termen gebruiken.

Nemen we de eerste vier termen, dan zal de rest van de reeks zijn:

$$\frac{1.\,3.\,5.\,7}{2^4}\int_T^\infty\frac{e^{-t^2}\,dt}{t^8} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

Nu is deze grootheid, afgezien van het teeken, kleiner dan de term

$$\frac{1.\,3.\,5\,e^{-T^2}}{2^3.\,T^7}$$

die onmiddellijk voorafgaat; d. w. z. men heeft:

$$\frac{e^{-T^2}}{T^7} > \frac{7}{2}\int_T^\infty\frac{e^{-t^2}\,dt}{t^8} \;\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

want:

$$\int_T^\infty\frac{e^{-t^2}\,dt}{t^8} = \int_T^\infty\frac{e^{-t^2}\,dt^2}{2t^9} < \frac{1}{2T^9}\left[e^{-t^2}\right]_T^\infty = \frac{1}{2T^9}\,e^{-T^2}$$

Digitized by Google

dus:

$$\frac{7}{2}\int_T^\infty \frac{e^{-t^2}\,dt}{t^8} < \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{T^9}e^{-T^2}$$

maar deze laatste uitdrukking is kleiner dan:

$$\frac{e^{-T^2}}{T^7}$$

als we slechts $4\,T^2 > 7$ of $T > \frac{1}{2}\sqrt{7}$ kiezen.

Hieruit blijkt de waarheid van (4) voor een betrekkelijk kleine waarde van T; zoodat voor groote waarden van T de eerste termen van de gevonden reeks genomen kunnen worden, zonder merkbare fout te maken.

II. Cauchy.

3. Cauchy toonde op elementaire wijze aan, [1]) dat sommige divergente machtreeksen, steeds tot die soort behooren, welke Poincaré later asymptotische noemde. Bij de reeks van Stirling en bij een menigte andere reeksen vond Cauchy, dat de eerste der verwaarloosde termen juist een bovenste grens is voor de correctie.

4. Deze eigenschap is evident voor een meetkundige reeks met reëele termen, want, nemen we een positieve variabele x en een positief getal k, dan is:

$$\frac{1}{k+x} = \frac{1}{k} - \frac{x}{k^2} + \ldots \pm \frac{x^{n-1}}{k^n} \mp \frac{x^n}{k^n\,(k+x)} \quad \ldots \quad (1)$$

en

$$\frac{x^n}{k^n\,(k+x)} < \frac{x^n}{k^{n+1}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

Wanneer we dus een meetkundige reeks met reëele

[1]) Comptes Rendus, 1843. T. XVII.

Digitized by Google

termen en afwisselende teekens bij een zekeren term afbreken, zal de eerste verwaarloosde term een bovenste grens zijn voor de begane fout en de overeenkomstige correctie zal 't zelfde teeken hebben als die term.

Dezelfde eigenschap geldt voor elke reeks, die gerangschikt is naar opklimmende machten van de variabele en voortgebracht wordt door de ontwikkeling van een rationeele of een transcendente functie, die ontleed kunnen worden in enkelvoudige breuken van den vorm:

$$\frac{h}{k + x}$$

waar h en k positief zijn, òf in breuken van den vorm:

$$\frac{h}{k^2 + x^2}$$

waar h positief en k reëel is.

Er wordt dus geëischt, dat de vergelijking, die men krijgt door 't omgekeerde van de gegeven functie gelijk nul te stellen, slechts reëele negatieve wortels heeft òf imaginaire wortels, zonder reëel deel.

Dezelfde eigenschap komt óok toe aan de ontwikkeling van bepaalde integralen, genomen van den oorsprong uitgaande en waarin dergelijke functies onder het integraalteeken voorkomen al of niet vermenigvuldigd met factoren, die binnen de integratiegrenzen altijd positief blijven.

5. De reeks van Stirling is de ontwikkeling van zulk een integraal. Wanneer men bij die ontwikkeling alle termen verwaarloost, waarin de getallen van Bernoulli voorkomen, dus reeds bij den eersten term ophoudt, dan komt er een resultaat, dat door Liouville gevonden is.

Hetzelfde geldt voor de ontwikkeling van $f(x)$ wanneer $f(x)$ een eenwaardige analytische functie voorstelt, maar zóo dat:

Digitized by Google

$$f(x) = \mathcal{E} \frac{((f(z)))}{x - z} + \mathcal{E} \frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{(1 - zx)((z))} \quad \ldots\ldots \quad (3)$$

wanneer we veronderstellen, dat de residus in den eersten term van het tweede lid genomen worden voor alle wortels der vergelijking:

$$\frac{1}{f(x)} = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (4)$$

en wel in bepaalde volgorde. (Zie hierover Noot II.)

Nemen we aan, dat deze wortels alleen negatief reëel of zuiver imaginair zijn en ontwikkelt men nu in 't tweede lid van (3) $\frac{1}{x - z}$ in een reeks, volgens opklimmende machten van x, waarbij elk der partiëele residus van $f(z)$ positief is, dan zal men eene ontwikkeling van $f(x)$ verkrijgen, die weer dezelfde eigenschap heeft.

Ook heeft de ontwikkeling van een integraal van den vorm:

$$\int_o^a u\, f(x)\, dx \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

deze eigenschap, als de factor u tusschen de grenzen o en a positief is.

6., Een eenvoudig voorbeeld wordt gevonden door te stellen:

$$f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$$

of

$$f(x) = \frac{1}{1 - e^{-x}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

Vergelijking (4) gaat dan over in:

$$e^x = 1$$

en deze heeft tot wortels de reëele en imaginaire logarithmen van de eenheid, d. w. z.:

Digitized by Google

$$2n\pi i \quad (n = 0, 1, 2 \ldots\ldots, -1, -2, \ldots\ldots)$$

(3) geeft dan de ontwikkeling:

$$\frac{e^x}{e^x - 1} = \frac{1}{1 - e^{-x}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} + \frac{1}{x - 2\pi i} + \frac{1}{x - 4\pi i} + \\ + \ldots + \frac{1}{x + 2\pi i} + \frac{1}{x + 4\pi i} + \ldots$$

en dus:

$$\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right\} = 2\left\{\frac{1}{x^2 + (2\pi)^2} + \frac{1}{x^2 + (4\pi)^2} + \ldots\right\}$$

Hier hebben we nu te doen met een ontbinding in breuken van den vorm:

$$\frac{2}{x^2 + k^2}$$

Door de getallen van BERNOULLI in te voeren vindt men voor alle waarden van x:

$$\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{B_1}{2\,!} - \frac{B_2 x^2}{4\,!} + \frac{B_3 x^4}{6\,!} - \ldots \\ \pm \frac{B_n x^{2n-2}}{(2n)\,!} \mp \theta \frac{B_{n+1} x^{2n}}{(2n+2)!} \ldots . \quad (\theta < 1). \ldots . \quad (7)$$

(Zie hierover Noot III).

Stellen we nu door u een reëele functie van x voor, die, tusschen de grenzen a en b van x, niet van teeken verandert, dan krijgen we uit (7)

$$\int_a^b \frac{u}{x}\left\{\frac{1}{1 - e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\right\} dx = \frac{B_1}{2\,!}\int_a^b u\,dx - \frac{B_2}{4\,!}\int_a^b ux^2\,dx + \\ + \frac{B_3}{6\,!}\int_a^b ux^4\,dx - \ldots \pm \frac{B_n}{(2n)\,!}\int_a^b ux^{2n-2}\,dx \mp \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+2)\,!}\int_a^b ux^{2n}\,dx \ldots (8)$$

waar $\theta < 1$.

7. Hierdoor zijn we in staat $\log \Gamma(z)$ in een reeks te ontwikkelen.

De formule van BINET is:

Digitized by Google

$$log\, \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) log\, z - z + \frac{1}{2} log\,(2\pi) + \Phi(z) \,.\,.\,.(9)$$

waarin:

$$\Phi(z) = \int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right\} e^{-zx} \frac{dx}{x} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(10)$$

In 't algemeen is:

$$\int_0^\infty x^{2m} e^{-nx} dx = \frac{(2m)!}{n^{2m+1}}$$

Formule (8) geeft dan:

$$\Phi(z) = \frac{B_1}{1.2z} - \frac{B_2}{3.4.z^3} + \frac{B_3}{5.6\,z^5} - \cdots - (-1)^n \frac{B_n}{(2n-1)\,2n\,z^{2n-1}} -$$
$$- (-1)^{n+1} \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+1)(2n+2)\,z^{2n+1}} \,.\,.\,.\, (\theta < 1) \,.\,.\,.\,.\, (11)$$

8. Stellen we in (11) $n=1$, dan krijgen we de formule die LIOUVILLE reeds gevonden heeft, nl.:

$$\Phi(z) = \theta \,.\, \frac{B_1}{2z} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (12)$$

waardoor voor $\Phi(z)$ als bovenste grens gevonden wordt:

$$\Phi(z) < \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2z} \,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\, (13)$$

9. Wordt in formule (8) $a=0$ en $b=\infty$ genomen en stellen we:

$$u = x^k \,.\, e^{-zx}$$

waar k een positief getal is, maar overigens willekeurig, dan komt er:

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{1-e^{-x}} - \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \right\} x^{k-1} e^{-zx} dx = \frac{B_1}{2} \frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}} - \frac{B_2}{4!} \frac{\Gamma(k+3)}{z^{k+3}} + \ldots$$
$$\ldots \pm \frac{B_n}{(2n)!} \frac{\Gamma(k+2n-1)}{z^{k+2n-1}} \mp \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+2)!} \frac{\Gamma(k+2n+1)}{z^{k+2n+1}} \ldots (\theta < 1) \ldots (14)$$

10. Door in (14) te substitueeren:

Digitized by Google

$$\frac{1}{1-e^{-x}}=1+e^{-x}+e^{-2x}+\ldots$$

komt er, als we $k>1$ veronderstellen:

$$\frac{1}{z^k}+\frac{1}{(z+1)^k}+\ldots=\frac{1}{z^{k-1}}+\frac{1}{2.z^k}+\frac{B_1}{2}\frac{\Gamma(k+1)}{z^{k+1}}-$$

$$-\frac{B_2}{4!}\frac{\Gamma(k+3)}{z^{k+3}}+\ldots\pm\frac{B_n}{(2n)!}\frac{\Gamma(k+2n-1)}{z^{k+2n-1}}\mp\theta\frac{B_{n+1}}{(2n+1)!}\frac{\Gamma(k+2n+1)}{z^{k+2n+1}}\ldots(15)$$

Als k tusschen 1 en 2 ligt en z groot genomen wordt, geeft (15) 't middel om met groote benadering de som te bepalen van:

$$\sum_{n=o}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^k}$$

Digitized by Google

HOOFDSTUK II.

ONTWIKKELING IN REEKSEN.

I. Methode van Stieltjes.

1. Stieltjes [1]) onderzocht eenige ontwikkelingen van den vorm:

$$F(a) = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \dots\dots\dots \quad (1)$$

die men niet onbepaald mag voortzetten, zoodra het getalberekening geldt, wanneer ze divergent zijn.

Zulk eene divergente ontwikkeling heeft echter eene bepaalde beteekenis, als men haar beschouwt als een symbolische wijze van uitdrukken, waarmede men wil aangeven, dat:

$$\lim_{a=\infty} F(a) = m_o$$

$$\lim_{a=\infty} a \left\{ F(a) - m_o \right\} = m_1$$

$$\lim_{a=\infty} a^2 \left\{ F(a) - m_o - \frac{m_1}{a} \right\} = m_2$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\lim_{a=\infty} a^n \left\{ F(a) - m_o - \frac{m_1}{a} - \dots - \frac{m_{n-1}}{a^{n-1}} \right\} = m_n$$

enz.

---

[1]) Recherches sur quelques séries semi-convergentes. (Thèse de doctorat) Annales de l'école normale supérieure 1886.

Digitized by Google

2. Als toepassing van de handelwijze van STIELTJES moge het volgende dienen:

Wordt een functie $F(a)$ uitgedrukt door een reeks, die voor groote waarden van a, er een asymptotische voorstelling van geeft, dan is:

$$\lim_{a=\infty} F(a) = m_0$$

een eerste benadering voor $F(a)$. Zoo is dan:

$$\lim_{a=\infty} a \{F(a) - m_0\} = m_1$$

een betere benadering en de volgende uitdrukkingen geven telkens wéer een betere benadering.

Kiezen we als voorbeeld:

$$F(a) = e^{-a} \int_0^1 \frac{e^{az} - 1}{z} dz \text{ . . . . } (2)$$

dan is:

$$\lim_{a=\infty} F(a) = \lim_{a=\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{az}-1}{z} dz}{e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{\int_0^1 e^{az}\, dz}{e^a} =$$

$$= \lim_{a=\infty} \frac{\left[\frac{e^{az}}{a}\right]_0^1}{e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{\frac{e^a - 1}{a}}{e^a} = 0$$

zoodat we volgens 't bovenstaande krijgen:

$$m_0 = 0.$$

Eveneens vinden we nu:

$$\lim_{a=\infty} a \{F(a) - m_0\} = \lim_{a=\infty} a\, F(a) = \lim_{a=\infty} \frac{\int_0^1 \frac{e^{az}-1}{a} dz}{\frac{e^a}{a}} =$$

$$= \lim_{a=\infty} \frac{\frac{e^a - 1}{a}}{\frac{1}{a} e^a - \frac{1}{a^2} e^a} = \lim_{a=\infty} \frac{a(e^a - 1)}{e^a (a - 1)} = 1$$

Digitized by Google

zoodat dan gevonden wordt:

$$m_1 = 1.$$

Op gelijke wijze worden gevonden:

$$\lim_{a=\infty} a \{a F(a) - 1\} = 1$$
$$\lim_{a=\infty} a \{a^2 F(a) - a - 1\} = 2$$

enz.

Hieruit volgt dan de ontwikkeling:

$$F(a) = e^{-a} \int_0^1 \frac{e^{az} - 1}{z} dz = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} + \frac{3!}{a^4} + \dots \quad (3)$$

3. Om nu door zulk een reeks de waarde van $F(a)$ te vinden, moet de complementaire term bepaald worden, d.i. de term, die men bij een bepaald aantal begintermen van de reeks moet voegen om de werkelijke waarde van $F(a)$ te krijgen. Die bepaling biedt in 't algemeen groote moeilijkheden, als men een behoorlijke benadering wil hebben; slechts in enkele gevallen gehoorzamen de coëfficienten m aan een zóo eenvoudige wet, dat die bepaling op vrij gemakkelijke wijze geschieden kan. In verschillende gevallen, waar de teekens der coëfficienten afwisselen, is de nauwkeurige waarde van $F(a)$ gelegen tusschen de n^e en $(n+1)^e$ term. Om deze reden werden de reeksen semi-convergent genoemd, welke uitdrukking door Stieltjes echter meer algemeen werd opgevat, die ze n.l. ook gebruikt om reeksen te benoemen, waar de teekens alle gelijk zijn.

Zoo komt hij dan tot de onderscheiding van reeksen van de eerste en van de tweede soort.

4. Bij reeksen van de tweede soort, b.v.b.:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} + \frac{3!}{a^4} + \dots + \frac{(n-1)!}{a^n} + \dots$$

redeneert Stieltjes op de volgende wijze:

Digitized by Google

Zij $F(a)$ een bepaalde functie van a, symbolisch uitgedrukt door:

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2\,!}{a^3} + \ldots$$

dan is, voor een bepaalde waarde van a:

$$F(a) = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} + \ldots + \frac{(n-1)\,!}{a^n} + R_n \ldots \quad (4)$$

$$F(a) = T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n + R_n. \ldots \quad (5)$$

waar dus R_n de rest voorstelt, die aan de eerste n termen van de reeks moet toegevoegd worden om $F(a)$ te krijgen. Is nu a vast en dus $F(a)$ bepaald, dan zal R_n bij toenemende waarden van n eerst positief zijn; daar echter de reeks meer en meer tot ∞ nadert bij toenemende waarden van n zal R_n stellig eindigen met $-\infty$ te worden.

Er is dus een waarde n waarbij R_n overgaat van positief tot negatief, dus nul is. Beschouwt men nu R_n als een continue functie van n en kan men een geheel getal als waarde voor n bepalen, waarvoor

$$R_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

is, dan geeft deze n 't rangnummer van die term van de reeks, waarachter géen restterm meer behoeft gevoegd te worden d.w.z. die term, waarbij men moet ophouden om de nauwkeurige waarde van $F(a)$ door middel van de reeks te verkrijgen.

De gevonden waarde voor n zal echter in 't algemeen *niet* een geheel getal zijn. Neemt men nu het naastgelegen kleinere en ook het naastgelegen grootere geheele getal, dan verkrijgt men twee grenzen voor de rest, die gewoonlijk niet ver uiteen liggen, daar de overgang van teeken meestal in de nabijheid van den kleinsten term plaats heeft.

Wanneer men als oplossing van

$$R_n = 0$$

Digitized by Google

de waarde N heeft gevonden, dan is deze waarde te schrijven als

$$N = n + \lambda$$

waar n het grootste geheele getal voorstelt, dat bevat is in N.

De beste benadering zal dan zijn:

$$T_1 + T_2 + T_3 + \ldots + T_n + \lambda\, T_{n+1}$$

5. De benaderde oplossing van (6) is altijd van den vorm:

$$n = \alpha\, a + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \frac{\alpha_2}{a^2} + \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

'tIs echter dikwijls geschikter a als onbekende te beschouwen en eerst de coëfficienten β te bepalen van de ontwikkeling

$$a = \beta n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

De reeksen (7) en (8) hebben gelijken vorm en karakter als de oorspronkelijke

$$F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots$$

Enkele der coëfficienten worden berekend; verdere berekening is zeer lastig, daar ze geen eenvoudige wet volgen. 't Onderzoek van de oorspronkelijke reeks is zoo teruggebracht tot dat van (7) 't welk veel ingewikkelder is. Men vraagt echter den wortel van (6) slechts met zekere benadering te bepalen en daar de nauwkeurigheid van (8) toeneemt naarmate n grooter is, is 't slechts noodig (7) en (8) te benaderen door a en n veel kleiner waarden te geven, dan die, waarvan men zich moet bedienen bij de oorspronkelijke reeks. De verkregen benadering zal altijd meer dan voldoende zijn.

6 De behandeling van de reeksen van de eerste soort kan, tot op zekere hoogte, in overeenstemming gebracht worden met die van reeksen van de tweede soort. Zij zulk een reeks:

Digitized by Google

$$T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \ldots . \pm T_n \mp R_n \ldots\ldots (9)$$

waarbij $T_1, T_2 \ldots . T_n$ en R_n positief zijn en waar:

$$R_n < T_n \text{ en } R_n < T_{n+1} \ldots\ldots\ldots (10)$$

is. Dit laatste volgt uit het positief zijn van Rn terwijl:

$$T_n = R_{n-1} + R_n \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

Men ziet dus dat R_{n-1} en R_n elk afzonderlijk kleiner zijn dan T_n, zoodat dus ook:

$$R_n < T_{n+1}$$

Inplaats dat de kleinste term opgezocht wordt, zoekt men het minimum van R_n door oplossing van de transcendente vergelijking:

$$\frac{dR_n}{dn} = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (12)$$

De waarde van n, hieruit gevonden, verschilt zeer weinig met het rangcijfer van den kleinsten term, waardoor de volgende opmerking, die bij verschillende gevallen gemaakt kan worden, te verklaren is:

Stellen we, dat de wortel van (12) tusschen n en $n-1$ valt, dan zal bij benadering:

$$R_{n-1} = R_n$$

zijn (zooals uit een figuur gemakkelijk te zien is) en de begane fout zal een klein breukdeel van R_n zijn; hieruit volgt dan weer dat R_n ten naastenbij de helft van T_n is, zoodat de fout van:

$$T_1 - T_2 + T_3 - T_4 + \ldots \pm T_n \mp \frac{1}{2} T_n$$

een klein deel van T_n is en wel kleiner naarmate n grooter is.

Voegen we hierbij dat in 't onderhavige geval R_n in een semi-convergente reeks te ontwikkelen is volgens afdalende machten van n, dan laat de eerste term van deze ontwikkeling zien dat:

Digitized by Google

$$lim.\frac{R_n}{T_n}=\frac{1}{2}$$

is voor $n=\infty$.

II. Toepassing op li-functie.

7. De integraallogarithme geeft een voorbeeld van de tweede soort:

$$li(a)=\int_0^a\frac{du}{log\,u}$$

Deze integraal is onbepaald als $a>1$ is; daarom neemt men de principale waarde, die volkomen bepaald is.

Voor $a>1$ is dus:

$$li(a)=\lim_{\varepsilon=o}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\frac{du}{log\,u}+\int_{1+\varepsilon}^a\frac{du}{log\,u}\right\}\;\ldots\ldots\quad(13)$$

Vervangt men hierin a door e^a en stelt men verder:

$$u=e^{a(1-\nu)}$$

dan komt er:

$$li(e^a)=e^a\lim_{\varepsilon=o}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\frac{e^{-a\nu}}{1-\nu}d\nu+\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\frac{e^{-a\nu}}{1-\nu}d\nu\right\}\ldots\quad(14)$$

Substitueer hierin:

$$\frac{1}{1-\nu}=1+\nu+\nu^2+\ldots+\nu^{n-1}+\frac{\nu^n}{1-\nu}$$

en:

$$\lim_{\varepsilon=o}\left\{\int_0^{1-\varepsilon}\nu^{\varkappa}e^{-a\nu}d\nu+\int_{1+\varepsilon}^{\infty}\nu^{\varkappa}e^{-a\nu}d\nu\right\}=\frac{\varkappa!}{a^{\nu+1}}$$

dan wordt de uitdrukking:

$$li(e^a)=e^a\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{2!}{a^3}+\ldots+\frac{(n-1)!}{a^n}+R_n\right\}\ldots\ldots\quad(15)$$

Digitized by Google

waarin:

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\nu^n e^{-a\nu}}{1-\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-a\nu}}{1-\nu} d\nu \right\} \ldots (16)$$

d.i. de principale waarde van de integraal:

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu^n e^{-a\nu}}{1-\nu} d\nu$$

De vorm, die R_n hier aanneemt, doet zien, dat de waarde van R_n afneemt, naarmate n grooter wordt.

De eerste term van de uitdrukking voor R_n bepaalt de orde van R_n; daarin is ν altijd kleiner dan 1, zoodat die term kleiner is, naarmate n grooter genomen wordt.

8. We willen nu een benaderde oplossing zoeken voor de vergelijking:

$$R_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Stellen we $a = n + \eta$ dan krijgen we:

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu \right\} \ldots (18)$$

R_n moet ontwikkeld worden in een semi-convergente reeks volgens afdalende machten van n.

Het stellen van $a = n + \eta$ beteekent, dat de rest van een term T_n beschouwd wordt, in de buurt van de kleinste term, want η is een eindig getal.

Daar het om eene benadering te doen is, mogen we die stukken verwaarloozen, welke ten opzichte van de andere, sneller afnemen dan eenige negatieve macht van n.

We verwaarloozen daarom:

$$\int_0^{1-h} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+k}^{\infty} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu \ldots (19)$$

en behouden:

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu \right\} \ldots (20)$$

Digitized by Google

waarin h en k eindig en positief, maar overigens willekeurig zijn.

Beschouwen we eerst:

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} \, d\nu \; .$$

$\nu e^{-\nu}$ wordt maximum voor $\nu = 1$. Stel:

$$\nu e^{-\nu} = e^{-1-x^2}$$

en $\quad 1 - \nu = t$

dan is:

$$(1 - t)\, e^t = e^{-x^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Voor kleine waarden van x is t te ontwikkelen in een reeks van den vorm:

$$t = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_p x^p + \; . \; . \; . \; (22)$$

waarvan we nu de coëfficienten a willen bepalen.

Uit (21) vinden we:

$$t + \log(1 - t) = - x^2.$$

of:

$$t - \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} - \ldots . = - x^2$$

Verwaarloozen we hoogere machten van t, dan krijgen we als eerste benadering:

$$t = x\sqrt{2}$$

zoodat:

$$a_1 = \sqrt{2}$$

is. Om de andere coëfficienten te bepalen, merken we op dat uit (21) onmiddellijk volgt:

$$t \frac{dt}{dx} = 2x(1 - t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Door (23) n malen te differentieeren en daarna $x = 0$ en $t = 0$ te stellen, krijgen we de recurrente betrekking:

$$n\, a_1 a_n + (n-1)\, a_2 a_{n-1} + (n-2)\, a_3 a_{n-2} + \cdot\cdot + a_n a_1 = -2\, a_{n-1} \, (n \geqslant 2)$$

Digitized by Google

waarin:

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\nu^n e^{-a\nu}}{1-\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{\nu^n e^{-a\nu}}{1-\nu} d\nu \right\} \ldots (16)$$

d.i. de principale waarde van de integraal:

$$\int_0^{\infty} \frac{\nu^n e^{-a\nu}}{1-\nu} d\nu$$

De vorm, die R_n hier aanneemt, doet zien, dat de waarde van R_n afneemt, naarmate n grooter wordt.

De eerste term van de uitdrukking voor R_n bepaalt de orde van R_n; daarin is ν altijd kleiner dan 1, zoodat die term kleiner is, naarmate n grooter genomen wordt.

8. We willen nu een benaderde oplossing zoeken voor de vergelijking:

$$R_n = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Stellen we $a = n + \eta$ dan krijgen we:

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_0^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{\infty} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu \right\} \ldots (18)$$

R_n moet ontwikkeld worden in een semi-convergente reeks volgens afdalende machten van n.

Het stellen van $a = n + \eta$ beteekent, dat de rest van een term T_n beschouwd wordt, in de buurt van de kleinste term, want η is een eindig getal.

Daar het om eene benadering te doen is, mogen we die stukken verwaarloozen, welke ten opzichte van de andere, sneller afnemen dan eenige negatieve macht van n.

We verwaarloozen daarom:

$$\int_0^{1-h} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+k}^{\infty} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu \ldots (19)$$

en behouden:

$$R_n = \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu \right\} \ldots (20)$$

Digitized by Google

waarin h en k eindig en positief, maar overigens willekeurig zijn.

Beschouwen we eerst:

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} \, d\nu \, .$$

$\nu e^{-\nu}$ wordt maximum voor $\nu = 1$. Stel:

$$\nu e^{-\nu} = e^{-1-x^2}$$

en $$1 - \nu = t$$

dan is:

$$(1 - t)\, e^t = e^{-x^2} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (21)$$

Voor kleine waarden van x is t te ontwikkelen in een reeks van den vorm:

$$t = a_1\, x + a_2\, x^2 + a_3\, x^3 + \ldots + a_p\, x^p + \;\; . \; . \; . \; (22)$$

waarvan we nu de coëfficienten a willen bepalen.

Uit (21) vinden we:

$$t + \log\,(1 - t) = -\, x^2.$$

of:

$$t - \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} - \; \ldots . = -\, x^2$$

Verwaarloozen we hoogere machten van t, dan krijgen we als eerste benadering:

$$t = x\sqrt{2}$$

zoodat: $$a_1 = \sqrt{2}$$

is. Om de andere coëfficienten te bepalen, merken we op dat uit (21) onmiddellijk volgt:

$$t\,\frac{dt}{dx} = 2x\,(1 - t) \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (23)$$

Door (23) n malen te differentieeren en daarna $x = 0$ en $t = 0$ te stellen, krijgen we de recurrente betrekking:

$$n\, a_1\, a_n + (n-1)\, a_2\, a_{n-1} + (n-2)\, a_3\, a_{n-2} + \cdot\cdot + a_n\, a_1 = -\, 2\, a_{n-1}\, (n \geqslant 2)$$

Digitized by Google

Gaan we nu uit van $a_1 = \sqrt{2}$, dan worden de andere coëfficienten gevonden.

Hetzelfde resultaat is nog wat gemakkelijker te bereiken door in (23) de veronderstelde reeks (22) te substitueeren en dan de waarden van a_1 enz. door toepassing van 't theorema der onbepaalde coëfficienten te berekenen. Er komt dan:

$$(a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots)(a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + \ldots) = \\ = 2x(1 - a_1 x - a_2 x^2 - a_3 x^3 - \ldots)$$

of:

$$\begin{aligned} a_1{}^2 x + a_1 a_2 x^2 + a_1 a_3 x^3 + a_1 a_4 x^4 + a_1 a_5 x^5 + \ldots\ldots \\ + 2 a_1 a_2 x^2 + 2 a_2{}^2 x^3 + 2 a_2 a_3 x^4 + 2 a_2 a_4 x^5 + \ldots\ldots \\ + 3 a_1 a_3 x^3 + 3 a_2 a_3 x^4 + 3 a_3{}^2 x^5 + \ldots\ldots \\ + 4 a_1 a_4 x^4 + 4 a_2 a_4 x^5 + \ldots\ldots \\ + 5 a_1 a_5 x^5 + \ldots\ldots = \\ = 2x - 2 a_1 x^2 - 2 a_2 x^3 - 2 a_3 x^4 - 2 a_4 x^5 - \ldots\ldots \end{aligned}$$

waaruit onmiddellijk gevonden wordt:

$$a_1 = \sqrt{2};\ a_2 = -\frac{2}{3};\ a_3 = \frac{1}{18}\sqrt{2};\ a_4 = \frac{2}{135};\ a_5 = \frac{1}{1080}\sqrt{2};\ \text{enz.}$$

zoodat:

$$1 - \nu = t = \sqrt{2}.x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{18}\sqrt{2}.x^3 + \frac{2}{135}x^4 + \frac{1}{1080}\sqrt{2}.x^5 + \ldots$$

Hieruit volgt:

$$-d\nu = dt = \{a_1 + 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 + 4 a_4 x^3 + \ldots\} dx =$$

$$= \left\{\sqrt{2} - \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{2}.x^2 + \frac{8}{135}x^3 + \frac{1}{216}\sqrt{2}.x^4 + \ldots\right\} dx$$

Verder vinden we hieruit:

$$-\frac{d\nu}{1-\nu} = \frac{dx}{x}\left\{1 - \frac{1}{3}\sqrt{2}.x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{270}\sqrt{2}.x^3 + \frac{7}{405}x^4 + \ldots\right\}$$

Schrijven we:

$$e^{-\eta\nu} = e^{-\eta}.e^{\eta t} = e^{-\eta}\left\{1 + \eta t + \frac{\eta^2}{2!}t^2 + \frac{\eta^3}{3!}t^3 + \ldots\right\}$$

Digitized by Google

en substitueeren we hierin de gevonden reeks voor t, dan krijgen we, na rangschikking:

$$e^{-\eta\nu} = e^{-\eta}\left\{1+\eta\sqrt{2}.x+\left(-\frac{2}{3}\eta+\eta^2\right)x^2+\left(\frac{1}{18}\eta-\frac{2}{3}\eta^2+\frac{1}{3}\eta^3\right)\sqrt{2}.x^3+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{2}{135}\eta+\frac{1}{3}\eta^2-\frac{2}{3}\eta^3+\frac{2}{3}\eta^4\right)x^4+\ldots\right\}\ldots(24)$$

Substitueerende krijgen we ten slotte:

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon}\frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu}e^{-\eta\nu}\,d\nu =$$
$$= -\int_p^{\varepsilon'}(e^{-1-x^2})^n.\,e^{-\eta}\left\{1+\eta\sqrt{2}.x+\left(-\frac{2}{3}\eta+\eta^2\right)x^2+\ldots\right\}\times$$
$$\times\left\{1-\frac{1}{3}\sqrt{2}.x-\frac{1}{9}x^2+\ldots\right\}\frac{dx}{x}\ldots\ (25)$$

(De bepaling van ε' en p wordt hierachter besproken).

of:

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon}\frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu}e^{-\eta\nu}\,d\nu = e^{-n-\eta}\int_{\varepsilon'}^{p}e^{-nx^2}\left\{1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3\ldots\right\}\frac{dx}{x}\ldots(26)$$

waarin de coëfficienten A alle polynomia in η zijn, b.v.b.:

$$A_1 = \left(\eta-\frac{1}{3}\right)\sqrt{2}$$

$$A_2 = \eta^2-\frac{4}{3}\eta-\frac{1}{9}$$

enz.

De waarde p van de bovenste grens in (26) hangt af van de positieve grootheid h. Nu wordt h zóó gekozen, dat de reeks:

$$1+A_1x+A_2x^2+A_3x^3+\ldots\ldots$$

convergent blijft in 't geheele integratie interval, zoodat h dus een eindige grootheid is, onafhankelijk van n. Ook is h onafhankelijk van η, want de straal van de convergentie-cirkel van de reeks:

Digitized by Google

$$e^{\eta t} = 1 + \eta\sqrt{2}\, x + \ldots\ldots$$

is onafhankelijk van η. [1])

Dus h is een numerieke constante. —

Om de integraal:

$$\int_{1+}^{1+k} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu}\, d\nu$$

op analoge wijze te behandelen, kiezen we:

$$\nu e^{-\nu} = e^{-1-x^2}$$

en:

$$\nu - 1 = t$$

zoodat

$$(1+t)\, e^{-t} = e^{-x^2}$$

is. Nu ontwikkelen we t als:

$$t = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_4 x^4 + \ldots.$$

waarin a_1, a_2, enz. dezelfde waarden hebben als zooeven. Er komt dan:

$$\int_{1+}^{1+k} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu}\, d\nu =$$

$$= -e^{-n-\eta} \int^{p} e^{-nx^2} \left\{ 1 - A_1 x + A_2 x^2 - A_3 x^3 + \ldots \right\} \frac{dx}{x} \quad \ldots(27)$$

waar de coëfficienten A dezelfde beteekenis hebben als in (26).

Dit zullen we nu eerst aantoonen.

Uit:

$$\nu - 1 = t = a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - a_4 x^4 + \ldots \quad (28)$$

volgt:

$$d\nu = dt = \left\{ a_1 - 2 a_2 x + 3 a_3 x^2 - 4 a_4 x^3 + \ldots. \right\} dx$$

en uit:

---

[1]) Immers de grootste waarde van η is 1. Is de convergentiestraal nu zóó gekozen, dat de reeks eindig is voor $\eta = 1$, dan is die straal vanzelf convergentiestraal voor gebroken waarden van η.

Digitized by Google

$$(1+t)\,e^{-t} = e^{-x^2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (29)$$

volgt:

$$-t + \log(1+t) = -x^2$$

of:

$$-t + \frac{t}{1} - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \ldots = -x^2$$

Hoogere machten van t verwaarloozende, krijgen we:

$$t^2 = 2x^2$$

of: $$t = x\sqrt{2}$$

zoodat: $$a_1 = \sqrt{2}$$

Door (29) te differentieeren komt er:

$$t\frac{dt}{dx} = 2x(1+t)$$

Substitueeren we (28) hierin, dan komt er:

$$(a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \ldots)(a_1 - 2a_2 x + 3a_3 x^3 - \ldots) =$$
$$= 2x(1 + a_1 x - a_2 x^2 + a_3 x^3 - \ldots)$$

Door gelijkstelling van coëfficienten en door gebruik te maken van $a_1 = \sqrt{2}$, komt er dan:

$$a_1 = \sqrt{2};\ a_2 = -\frac{2}{3};\ a_3 = \frac{1}{18}\sqrt{2};\ a_4 = \frac{2}{135};$$
$$a_5 = \frac{1}{1080}\sqrt{2};\ \text{enz.}$$

en dit zijn dezelfde waarden als bij de vorige berekening.

Dus is:

$$v - 1 = t = \sqrt{2}.x + \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{18}\sqrt{2}.x^3 - \frac{2}{135}x^4 +$$
$$+ \frac{1}{1080}\sqrt{2}.x^5 + \text{enz.}$$

Hieruit volgt weer:

Digitized by Google

$$d\nu = dt = \left\{ \sqrt{2} + \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{2}.x^2 - \frac{8}{135}x^3 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{216}\sqrt{2}.\,x^4 + \dots \right\} dx$$

en verder:

$$\frac{d\nu}{1-\nu} = - \frac{\sqrt{2} + \frac{4}{3}x + \frac{1}{6}\sqrt{2}.x^2 - \frac{8}{135}x^3 + \dots}{\sqrt{2} + \frac{2}{3}x + \frac{1}{18}\sqrt{2}.x^2 - \frac{2}{135}x^3 + \dots} \cdot \frac{dx}{x}$$

Voeren we de deeling uit, dan komt er:

$$\frac{d\nu}{1-\nu} = - \left\{ 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2}.x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{1}{270}\sqrt{2}.x^3 + \dots \right\} \frac{dx}{x}$$

Verder is:

$$e^{-\eta\nu} = e^{-\eta(t+1)} = e^{-\eta}\, e^{-\eta t} =$$
$$= e^{-\eta} \left\{ 1 - \eta\, t + \frac{\eta^2}{2!}t^2 - \frac{\eta^3}{3!}t^3 + \dots\dots \right\}$$

en:

$$(\nu e^{-\nu})^n = (e^{-1-x^2})^n$$

zoodat de integraal wordt:

$$- \int_{\varepsilon'}^{p} (e^{-1-x^2})^n\, e^{-\eta} \left\{ 1 - \eta\, t + \frac{\eta^2}{2!}t^2 \dots \right\} \left\{ 1 + \frac{1}{3}\sqrt{2}x - \frac{1}{9}x^2 + \dots \right\} \frac{dx}{x}$$

Voeren we de vermenigvuldiging uit, substitueeren we de reeks voor t en rangschikken we naar x, dan komt er:

$$\int_{1-\varepsilon}^{1+k} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu}\, d\nu =$$
$$= - e^{-n-\eta} \int_{\varepsilon'}^{p} e^{-nx^2} \left\{ 1 + \left(\frac{1}{3} - \eta\right)\sqrt{2}.x + \left(\eta^2 - \frac{4}{3}\eta - \frac{1}{9}\right)x^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{270} - \frac{7}{18}\eta + \eta^2 - \frac{1}{3}\eta^3\right)\sqrt{2}.\,x^3 + \dots \right\} \frac{dx}{x}$$

waaruit de overeenkomst van de coëfficienten A in beide gevallen blijkt.

Digitized by Google

Uit:

$$\nu e^{-\nu} = e^{-1-x^2}$$

volgt:

$$-\nu + \log \nu = -1 - x^2$$

Voor de grens $\nu = 1 + \varepsilon$ komt in de plaats de grens ε';

$$\log(1+\varepsilon) - 1 - \varepsilon = -1 - \varepsilon'^2$$

$$+\frac{\varepsilon}{1} - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^3}{3} - \ldots - 1 - \varepsilon = -1 - \varepsilon'^2$$

Verwaarloozen we hoogere machten van ε dan volgt dus hieruit:

$$-\frac{\varepsilon^2}{2} = -\varepsilon'^2$$

of
$$\varepsilon' = \frac{1}{2}\varepsilon\sqrt{2}$$

als onderste grens.

We kiezen nu k zóo, dat de bovenste grens in 't tweede lid van (27) ook weer p wordt. Voegen we (26) en (27) samen, dan vallen de stukken weg, die ∞ worden voor ε (of ε') $= 0$.

Nemen we dus $\varepsilon = 0$, dan krijgen we:

$$\int_{1-h}^{1-\varepsilon} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu + \int_{1+\varepsilon}^{1+k} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} d\nu =$$

$$= 2e^{-n-\eta}\int_0^p e^{-nx^2} \{A_1 + A_3 x^2 + A_5 x^4 + \ldots\} dx \ldots \quad (30)$$

Nu zal:
$$\int_p^\infty e^{-nx^2} x^\varkappa dx \qquad (\varkappa \geqslant 0)$$

voor $n = \infty$ sneller tot nul naderen, dan eenige negatieve macht van n; een benaderde waarde voor (30) zal dus gevonden worden als:

$$2e^{-n-\eta}\int_0^\infty e^{-nx^2} A_1 dx = A_1 e^{-\eta-n}\sqrt{\frac{\pi}{n}}$$

Digitized by Google

of voor $\eta + n$ in de plaats stellend a en A_1 vervangend door de gevonden waarde, vinden we:

$$\left(\eta - \frac{1}{3}\right) e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \quad .$$

De verwaarloosde stukken:

$$\int_0^{1-h} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} \, d\nu \quad \text{en} \quad \int_{1+k}^{\infty} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} \, d\nu$$

hebben geen invloed op de ontwikkeling van R_n volgens afdalende machten van n. In de eerste integraal toch is de grootste waarde van

$$\nu e^{-\nu} = \theta \, e^{-1}$$

waarin θ een positieve echte breuk is, zoodat we vinden:

$$\int_0^{1-h} \frac{(\nu e^{-\nu})^n}{1-\nu} e^{-\eta\nu} \, d\nu < \frac{\theta^n}{h} e^{-n} \int_h^{+1} e^{-\eta(1-u)} \, du =$$

$$= \frac{\theta^n}{h} e^{-a} \int_h^{+1} e^{\eta u} \, du$$

waar de breuk θ^n sneller afneemt dan eenige negatieve macht van n.

In de tweede integraal stellen we

$$\nu = 1 + u$$

en zien dan, dat de absolute waarde er van kleiner is dan:

$$\frac{e^{-a}}{k} \int_k^{\infty} (1+u)^n e^{-nu} \, e^{-\eta u} \, du \, .$$

Kiezen we een grootheid $r > +1$ die aan:

$$1 + k = e^{\frac{k}{r}}$$

voldoet, dan is:

$$1 + u < e^{\frac{u}{r}} \quad \text{voor } u > k$$

en dus is:

Digitized by Google

$$\frac{e^{-a}}{k}\int_k^\infty (1+u)^n e^{-nu} e^{-\eta u}\, du < \frac{e^{-a}}{k}\int_k^\infty e^{-nu\left(1-\frac{1}{r}\right)-\eta u}\, du$$

Nu zien we, dat:

$$\frac{1}{k}\int_k^\infty e^{-nu\left(1-\frac{1}{r}\right)-\eta u}\, du$$

sneller afneemt, dan eenige negatieve macht van n; de tweede integraal mag dus ook verwaarloosd worden.

Formule (30) levert dus de gevraagde ontwikkeling in den vorm:

$$R_n = e^{-a}\sqrt{\frac{\pi}{n}}\left\{A_1 + \frac{1}{2}A_3 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1.3}{2.2}A_5 \cdot \frac{1}{n^2} + \dots\right\}$$

of wel:

$$R_n = e^{-a}\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left\{\eta - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2 + \frac{1}{12}\eta + \frac{1}{540}\right)\frac{1}{n} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{40}\eta^5 - \frac{5}{24}\eta^4 + \frac{25}{72}\eta^3 - \frac{1}{24}\eta^2 + \frac{1}{288}\eta + \frac{25}{6048}\right)\frac{1}{n^2} + \dots\right\} \dots (31)$$

Uit den vorm van (31) maakt men op, dat de waarde van η, die

$$R_n = 0$$

maakt, ontwikkeld kan worden als:

$$\eta = \beta_o + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \dots$$

waarvan de coëfficienten β bepaald worden, door substitutie van deze reeks in de gelijk nul gestelde vorm tusschen accolades van (31), door middel van onbepaalde coëfficienten.

Zoodoende vinden we:

$$\beta_o = \frac{1}{3}; \quad \beta_1 = \frac{8}{405}; \quad \beta_2 = -\frac{184}{25515}; \text{ enz.}$$

Daar we $a = n + \eta$ gesteld hebben, vinden we:

$$a = n + \frac{1}{3} + \frac{8}{405}\cdot\frac{1}{n} - \frac{184}{25515}\cdot\frac{1}{n^2} + \dots (32)$$

Digitized by Google

of ook door omkeering:

$$n = a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405} \cdot \frac{1}{a} + \frac{16}{25515} \cdot \frac{1}{a^2} - \ldots \quad (33)$$

9. Wanneer we dus de benaderde waarde van de wortel van

$$R_n = 0$$

N noemen, dan wordt 't resultaat:

$$\left.\begin{aligned} li(e^a) &= e^a \left\{ \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \ldots + \frac{(n-1)!}{a^n} + R_n \right\} \\ N &= a - \frac{1}{3} - \frac{8}{405} \cdot \frac{1}{a} + \frac{16}{25515} \cdot \frac{1}{a^2} + \ldots \end{aligned}\right\} \ldots (34)$$

met een orde van nauwkeurigheid, die gegeven wordt door:

$$e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

10. Door een getallen voorbeeld springt 't voordeel van 't gebruik van de ontwikkeling van STIELTJES boven dat van andere reeksen direct in 't oog.

Willen we b.v.b. de waarde van $li(10^{10})$ bepalen, dan is:

$$e^a = 10^{10}$$

dus: $$a = 23{,}025851$$

en: $$N = 22{,}692$$

We moeten dus 22 termen van (34) nemen en de 23ste 0,692 maal. Op deze wijze wordt dan gevonden:

$$li(10^{10}) = 455055614,\ 2227 + 0{,}692 \times 0{,}5246 =$$
$$= 455055614,\ 585$$

Als nauwkeurige waarde is berekend:

$$li(10^{10}) = 455055614,\ 5866$$

door middel van de reeks:

Digitized by Google

$$li(e^{\pm a}) = C + \log a \pm \frac{a}{1.1!} + \frac{a^2}{2.2!} \pm \frac{a^3}{3.3!} \pm \text{enz.}\ ^{1)} \ldots (35)$$

maar dan moeten veel meer termen gebruikt worden.

10. Om te zien welke term van (35) van directen invloed op de tweede decimaal is stellen we:

$$\frac{a^n}{n.\,n!} = 0{,}01 \text{ en nemen } n.\,n! \doteq \Gamma(n+2)$$

Nemen we logarithmen en maken we gebruik van de reeks voor $\log \Gamma(n+2)$, dan krijgen we:

$$n.\,l.\,a - (n + {}^3/_2)\,l.\,(n+2) + n + 2 - \frac{1}{2}\,l.\,(2\pi) - \frac{B_1}{2(n+2)} \ldots = l.\,0{,}01$$

of:

$$n \log a - (n + {}^3/_2) \log (n+2) + 0{,}4343\,(n+2) - \\ - {}^1/_2 \log (2\pi) = -2$$

Daar verwacht kan worden, dat n vrij groot is, is:

$$\frac{B_1}{2(n+2)} \doteq 0$$

zoodat:

$$1{,}3622\,(n+2) - 2{,}7244 - (n + {}^3/_2) \log (n+2) + \\ + 0{,}4343\,(n+2) - \frac{1}{2} \log (2\pi) = -2$$

of:

$$1{,}7965\,(n+2) - (n + {}^3/_2) \log (n+2) = 0{,}8225$$

Bij beide leden $-{}^1/_2 \log (n+2)$ optellende, komt er:

$$1{,}7965\,(n+2) - (n+2) \log (n+2) = 0{,}8225 - {}^1/_2 \log (n+2)$$

---

[1]) waarin $C = 0{,}577215664901532860606 5 \ldots =$ constante van EULER volgens SOLDNER. Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendente. München 1809.

Digitized by Google

waaruit:

$$log\,(n+2) = 1{,}7965 - \frac{0{,}8225 - \frac{1}{2}\,log\,(n+2)}{n+2}$$

De teller van de breuk in 't tweede lid is veel kleiner dan de noemer, dus is bij benadering:

$$log\,(n+2) = 1{,}7965$$

of $\qquad n+2 = 62{,}46$

Nauwkeuriger: $\qquad log\,(n+2) = 1{,}7955$

waaruit: $\qquad n+2 = 62{,}44$

zoodat er ruim 60 termen gebruikt dienen te worden.

Op dezelfde wijze vinden we, dat $n = 62$ genomen moet worden om directen invloed op de derde decimaal te hebben.

11. De integraallogarithme levert voor een argument kleiner dan de eenheid een reeks van de eerste soort.

$li\,(a)$ moet voor dit geval dan geschreven worden in den vorm $li\,(e^{-a})$. Nu is:

$$li\,(e^{-a}) = -\int_a^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = -e^{-a}\int_0^\infty \frac{e^{-a\nu}}{1+\nu}\,d\nu \quad \ldots \quad (36)$$

Door hierin te stellen:

$$\frac{1}{1+\nu} = 1 - \nu + \nu^2 - \nu^3 + \ldots\ldots \pm \nu^n \mp \ldots$$

of: $$\frac{1}{1+\nu} = 1 - \nu + \nu^2 - \nu^3 + \ldots \pm \frac{\nu^n}{1+\nu}$$

komt er:

$$li\,(e^{-a}) = -e^{-a}\int_0^\infty e^{-a\nu}\,\{1 - \nu + \nu^2 - \ldots \pm \nu^n \mp \ldots\}\,d\nu \ldots (37)$$

nu is:

$$\int_0^\infty e^{-a\nu}\,\nu^\varkappa\,d\nu = -\frac{1}{a}\Big[\nu^\varkappa\,e^{-a\nu}\Big]_0^\infty + \frac{\varkappa}{a}\int_0^\infty \nu^{\varkappa-1}\,e^{-a\nu}\,d\nu =$$

$$= \frac{\varkappa}{a}\int_0^\infty \nu^{\varkappa-1}\,e^{-a\nu}\,d\nu$$

Digitized by Google

Deze bewerking voortzettend, zien we:

$$\int_0^\infty e^{-a} \,.\, \nu^\varkappa \, d\nu = \frac{\varkappa\,!}{a^{\varkappa+1}}$$

zoodat dan:

$$li\, e^{-a} = -\, e^{-a} \left\{ \frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{2\,!}{a^3} - \frac{3\,!}{a^4} + \ldots\ldots \pm \frac{(n-1)\,!}{a^n} \mp R_n \right\} \ldots (38)$$

Uit (37) volgt dan:

$$R_n = \int_0^\infty \frac{\nu^n\, e^{-a}}{1+\nu}\, d\nu = n\,!\, e^{-a} \int_a^\infty \frac{e^{-u}\, du}{u^{n+1}} \ldots . \quad (39)$$

Door weder

$$a = n + \eta$$

te stellen, kunnen we R_n weer in een reeks ontwikkelen volgens afdalende machten van n, evenals dat gedaan is bij $li\,(e^a)$.

Er komt dan:

$$R_n = e^{-a} \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left\{ \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4}\, \eta^2 - \frac{1}{4}\, \eta - \frac{1}{12} \right) \frac{1}{n} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{1}{16}\, \eta^4 - \frac{7}{24}\, \eta^3 + \frac{1}{12}\, \eta^2 + \frac{1}{24}\, \eta + \frac{13}{576} \right) \frac{1}{n^2} + .. \right\} .. \quad (40)$$

Nemen we nu:

$$\frac{dR_n}{dn} = 0$$

dan zien we, dat de waarde voor η, die hieraan voldoet, te ontwikkelen is als:

$$\eta = \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots .$$

waaruit dan weer volgt:

$$a = n + \beta_0 + \frac{\beta_1}{n} + \frac{\beta_2}{n^2} + \ldots .$$

of door omkeering:

$$n = a + \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{a} + \ldots .$$

Digitized by Google

Bij uitvoering wordt gevonden:

$$a = n + \frac{1}{6n} + \ldots \text{enz.} \ldots \ldots \quad (41)$$

of:

$$n = a - \frac{1}{6a} + \ldots \text{enz.} \ldots \ldots \quad (42)$$

12. Door partieele integratie vinden we direct:

$$\int_a^\infty \frac{e^{-u}}{u}\,du = e^{-a}\left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} \ldots (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\right\} + \\ + (-1)^n n! \int_a^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u^{n+1}}$$

dus:

$$li\,(e^{-a}) = -e^{-a}\left\{\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{2!}{a^3} - \frac{3!}{a^4} + \ldots (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\right\} - \\ - (-1)^n n! \int_a^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u^{n+1}}$$

Hieruit vinden we:

$$mod\left[a^n\left\{li\,(e^{-a}) + e^{-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \ldots (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\right)\right\}\right] < n!\,a^n \int_a^\infty \frac{e^{-u}\,du}{u^{n+1}}$$

of:

$$< n!\,\frac{a^n}{e^a} \cdot \frac{1}{n}\left[\frac{1}{u^n}\right]_a^\infty$$

zoodat:

$$mod\left[a^n\left\{li\,(e^{-a}) + e^{-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \ldots (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\right)\right\}\right] < (n-1)!\,\frac{1}{e^a}$$

waaruit afgeleid wordt:

$$\lim_{a=\infty} mod\left[a^n\left\{li\,(e^{-a}) + e^{-a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \ldots (-1)^n \frac{n!}{a^{n+1}}\right)\right\}\right] < \varepsilon$$

Hieruit volgt (zie Hoofdst. III) dat de gevonden reeks werkelijk de asymptotische ontwikkeling van $li\,(e^{-a})$ is.

13. Als voorbeeld van berekening van $li\,(e^{-a})$ nemen we:

$$li\,0{,}00000454 = li\,(e^{-10}).$$

Digitized by Google

Uit:

$$N = a - \frac{1}{6a} + \ldots .$$

volgt, dat we $10 - \frac{1}{60}$ d. w. z. (daar 't ons om benadering te doen is) 9 termen moeten nemen en $\frac{59}{60}$ van de tiende.

$$li\,(e^{-10}) = -e^{-10}\left\{\frac{1}{10} - \frac{1}{10^2} + \frac{2\,!}{10^3} - \ldots\ldots\right\} =$$
$$= -0{,}00000454 \times 0{,}09154563 =$$
$$= -0{,}000000415617 \ldots\ldots\ldots$$

Voor negen termen wordt gevonden:

$$-0{,}000000415782 \ldots .$$

Volgens opgave van HOUËLL is:

$$li\,(e^{-10}) = -0{,}000000416$$

14. Nemen we $li\,(e^{-a}) = li\,(10^{-10})$
dan is hier:

$a = 23{,}02585 \ldots .$ en dus
$N = 23{,}01861 \ldots .$

zoodat we moeten nemen 23 termen en 0,01861 maal de 24ste.

Er wordt gevonden:

$$li\,(10^{-10}) = -0{,}000\,000\,000\,041\,68 \ldots\ldots$$

waarbij verwaarloosd is.

De 24ste term toch is:

$$0{,}000\,000\,000\,000\,975\,13 \ldots\ldots$$

Om zekere benadering te krijgen, behoeven we de berekening niet zóo ver voort te zetten.

De uitdrukking:

$$N = a - \frac{1}{6a}$$

geeft alléen aan, hoever de reeks voortgezet moet worden

3

Digitized by Google

om de hoogst mogelijk bereikbare nauwkeurigheid, volgens deze methode, te verkrijgen.

14. Ten slotte zullen we nog drie berekeningen uitvoeren, waar a kleine waarden heeft.

a. Voor $li\,(0{,}5) = li\,(e^{-a})$
is $a = 0{,}69312$

$$N = a - \frac{1}{6a} = 0{,}45271\ldots.$$

Daardoor vinden we:

$$li\,(0{,}5) = -\,e^{-0{,}69312} \times \frac{0{,}45271}{0{,}69312} = -\,0{,}327$$

Door gebruik te maken van drie termen van de reeks van BRETSCHNEIDER

$$li\,\frac{1}{x} = -\,\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{l.x+1} + \frac{1!\,1!}{(l.x+1)\,\{(l.x)^2+4\,l.x+2\}} + \right.$$
$$\left. + \frac{2!\,2!}{\{(l.x)^2+4\,l.x+2\}\,\{(l.x)^3+9(l.x)^2+18\,l.x+6\}} + \ldots\right\} \quad ^{1)}$$

vinden we: $li\,(0{,}5) = -\,0{,}324.$

De werkelijke waarde is

$$li\,(0{,}5) = -\,0{,}37867\ldots\ldots$$

Eén term van de reeks van STIELTJES geeft dus grooter nauwkeurigheid dan drie van die van BRETSCHNEIDER.

b. Ter bepaling van $li\left(\frac{1}{e}\right)$ substitueeren we $a = 1$ en krijgen dan:

$$li\,e^{-1} = -\,e^{-1}\left\{1 - \frac{1}{1} + \frac{2!}{1} - \frac{3!}{1} + \frac{4!}{1}\ldots\ldots\right\} \quad ^{2)}$$

---

1) Theoriae logarithmi integralis lineamento nova. Crelle. Bd. XVII.

2) Deze zelfde reeks, ontstaat door in de reeks van BRETSCHNEIDER (Crelle. Bd. XVII):

$$li\,\frac{1}{x} = -\,\frac{1}{x\,l.x}\left\{1 - \frac{1!}{l.x} + \frac{2!}{(l.x)^2} - \frac{3!}{(l.x)^3} + \ldots\right\}$$

te substitueeren $x = e$.

Digitized by Google

Nu is dus:

$$N = a - \frac{1}{6a} = 1 - \frac{1}{6} = 0,8\dot{3}$$

zoodat een benadering is:

$$li\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{0,8\dot{3}}{2,7182818\ldots} = -0,305\ldots$$

Werkelijk is:

$$li\left(\frac{1}{e}\right) = -0,21938\ldots\ldots$$

c. Nemen we nog

$$li(e) = e\,\{1 + 1 + 2! + 3! + \cdots + n! + \cdots\},$$

zoodat:

$$N = 1 - \frac{1}{3} - \frac{8}{405} + \ldots = 0,6473\ldots.$$

dan vinden we:

$$li(e) = 1,7740\ldots.$$

De werkelijke waarde is:

$$li(e) = 1,8951\ldots.$$

De laatste drie voorbeelden bevatten kleine waarden voor a, hoewel de reeks bedoeld is voor groote waarden. Toch vinden we uitkomsten die betrekkelijk weinig van de ware waarden verschillen; waaruit, in verband met de geringe moeite om de gevonden uitkomsten te verkrijgen, wèl de bruikbaarheid van de aangewende reeksen blijkt. (Zie Noot IV.)

———————

Digitized by Google

HOOFDSTUK III.

DEFINITIE VAN POINCARÉ. BEWERKINGEN. TOEPASSINGEN.

I. Definitie van Poincaré.

1. Poincaré geeft de definitie in den volgenden vorm [1]):
Een functie $F(a)$ heeft tot asymptotische ontwikkeling een divergente reeks van de gedaante:

$$m_0 + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{x^3} + \ldots\ldots$$

of

$$S_n + \frac{m_{n+1}}{x^{n+1}} + \frac{m_{n+2}}{x^{n+2}} + \ldots\ldots$$

wanneer de uitdrukking:

$$a^n \{F(a) - S_n\}$$

voor iedere positieve geheele waarde van n tot nul nadert, als a (steeds reëel positief) onbepaald toeneemt.

Dus moet dan:

$$a^n \{F(a) - S_n\} = \varepsilon$$

of

$$\lim_{a=\infty} a^n \{F(a) - S_n\} = \lim_{a=\infty} \varepsilon = 0$$

S_n stelt dus de som der eerste $n+1$ termen van de reeks voor.

We schrijven dan:

$$F(a) \backsim S_n$$

---

[1]) Acta mathematica 8.

Digitized by Google

2. Wanneer een functie eene asymptotische ontwikkeling heeft, dan is deze ook de eenige; want stellen we eens, dat de functie twee zulke verschillende ontwikkelingen toelaat, dan is dus:

$$F(a) = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{a^n}$$

en ook:

$$F(a) = p_o + \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a^2} + \cdots + \frac{p_n + \varepsilon'_n}{a^n}$$

dan moet:

$$(m_o - p_o) + (m_1 - p_1)\frac{1}{a} + \cdots + (m_n - p_n + \varepsilon_n - \varepsilon'_n)\frac{1}{a^n} = 0$$

of

$$m_o = p_o$$

$$m_1 = p_1$$

enz.

$$m_n - p_n + \varepsilon_n - \varepsilon'_n = 0$$

waaruit volgt, dat beide ontwikkelingen volkomen gelijk zijn.

3. Het omgekeerde is echter niet waar, d. w. z. een gegeven asymptotische reeks kan verschillende functies asymptotisch voorstellen.

Beschouwen we de funtie e^{-a}, dan zien we:

$$\lim_{a=\infty} e^{-a} = 0 = m_o$$

$$\lim_{a=\infty} a(e^{-a} - m_o) = 0 = m_1$$

$$\lim_{a=\infty} a^2\left(e^{-a} - m_o - \frac{m_1}{a}\right) = 0 = m_2$$

enz.

waaruit blijkt, dat de asymptotische ontwikkeling van e^{-a} identiek nul is.

Digitized by Google

Is dus gegeven de asymptotische ontwikkeling:

$$F(a) = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdots + \frac{m_n}{a^n} + \ldots.$$

en tellen we daarbij e^{-a} of

$$A . e^{-a} = 0 + 0 + 0 + \text{ enz.}$$

dan zien we, dat ook:

$$F(a) + A\, e^{-a} = m_o + \frac{m_1}{a} + \cdots + \frac{m_n}{a_n} + \ldots.$$

is. Er bestaan dus functies $M(a)$ zóodanig dat:

$$\lim_{a=\infty} a^n\, M(a) = 0$$

voor elke (positieve geheele) waarde van n. De asymptotische ontwikkeling van $F(a)$ is dan tevens die van

$$F(a) + A.\, M(a).$$

Willen we dus hebben, dat een gegeven reeks de asymptotische voorstelling is van een bepaalde functie, dan dienen we nog voorwaarden te stellen b.v.b. dat de bedoelde functie de integraal moet zijn van een gegeven differentaal vergelijking.

II. Bewerkingen op asymptotische ontwikkelingen.

4. Wanneer eenige functies asymptotisch voorgesteld kunnen worden, dan blijft, bij 't toepassen van bewerkingen op die functies, de asymptotische voorstelling bestaan, d. w. z. de asymptotische voorstelling van som, verschil, product en quotient van twee of meer functies wordt gevonden uit som, verschil, product en quotient van de asymptotische voorstellingen dier functies.

Dit is analoog met 't geen bij convergeerende reeksen geschiedt.

Digitized by Google

5. Optelling en aftrekking.

In:

$$F(a) = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots. + \frac{m_n + \varepsilon_n}{a^n}$$

en

$$F_1(a) = m'_o + \frac{m'_1}{a} + \frac{m'_2}{a^2} + \ldots + \frac{m'_n + \varepsilon'_n}{a^n}$$

zijn ε_n en ε'_n kleine grootheden, die bij 't aangroeien van a meer en meer tot nul naderen; dus zal in:

$$F(a) + F_1(a) = (m_o + m'_o) + \frac{m_1 + m'_1}{a} + \\ + \frac{m_2 + m'_2}{a^2} + \ldots + \frac{m_n + m'_n + \varepsilon_n + \varepsilon'_n}{a^n}$$

$(\varepsilon_n + \varepsilon'_n)$ aan dezelfde eigenschap voldoen, zoodat de som der asymptotische voorstellingen van de gegeven functies de asymptotische voorstelling van de som dier functies is.

Men zegt dan kortweg, dat 't geoorloofd is asymptotische ontwikkelingen op te tellen en af te trekken.

6. Vermenigvuldiging.

Nemen we weer dezelfde functies met hunne asymptotische ontwikkelingen als zooeven, dan zien we bij vermenigvuldiging:

$$F(a) \times F_1(a) = m_o\, m'_o + \frac{m_o\, m'_1 + m_1\, m'_o}{a} + \\ + \frac{m_o\, m'_2 + m_1\, m'_1 + m_2\, m'_o}{a^2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \\ + \frac{m_o\, m'_n + m_1\, m'_{n-1} + \ldots + m_n\, m'_o}{a^n} + \frac{m_o\, \varepsilon'_n + m'_o\, \varepsilon_n}{a^n} + \\ + \frac{m_1\,(m'_n + \varepsilon'_n) + m_2\, m'_{n-1} + \ldots + (m_n + \varepsilon_n)\, m'_1}{a^{n+1}} + \ldots + \\ + \frac{(m_n + \varepsilon_n)(m'_n + \varepsilon'_n)}{a^{2n}}$$

Digitized by Google

of:

$$F(a) \times F_1(a) = m_o\, m'_o + \frac{m_o\, m'_1 + m_1\, m'_o}{a} + \ldots\ldots\ldots +$$
$$+ \frac{m_o\, m'_n + m_1\, m'_{n-1} + \ldots + m'_o\, m_n}{a^n} + \frac{\eta}{a^n} \quad ^{1)}$$

waar η, bij onbepaalde aangroeiing van a, onbepaald afneemt, want η is van dezelfde orde als ε_n en ε'_n.

Wanneer dus twee of meer functies voorgesteld kunnen worden door asymptotische reeksen, dan kan hun product voorgesteld worden door 't product van hunne asymptotische voorstellingen.

7. Hieruit volgt onmiddellijk, dat een macht met geheele exponent van een asymptotisch ontwikkelbare functie voorgesteld kan worden door de gelijknamige macht van de asymptotische ontwikkeling van die functie.

Als tweede gevolg verkrijgen we hieruit, dat een polynomium, waarvan de termen machten zijn van een functie, die asymptotisch ontwikkelbaar is, asymptotisch te ontwikkelen is, als we voor de termen van 't polynomium hunne asymptotische ontwikkelingen in de plaats zetten.

$$f(F) = A_o + A_1\, F + A_2\, F^2 + \cdots + A_p\, F^p$$

is dus asymptotisch te ontwikkelen, als men weet:

$$F = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{a^n}$$

8. Deeling.

Wanneer we nemen:

$$F(a) = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \cdots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{a^n}$$

[1]) 't Product eindigt bij den term met $\frac{1}{a^n}$; deze toch geeft den graad van nauwkeurigheid van de ontwikkeling aan.

Digitized by Google

dan is:

$$\frac{1}{F(a)}=\frac{1}{m_o\left\{1+\frac{m_1}{m_o\,a}+\frac{m_2}{m_o\,a^2}+\cdots+\frac{m_n+\varepsilon_n}{m_o\,a^n}\right\}}$$

Stellen we hierin:

$$\varphi(a)=\frac{m_1}{m_o\,a}+\frac{m_2}{m_o\,a^2}+\cdots+\frac{m_n+\varepsilon_n}{m_o\,a^n}$$

dan is·

$$\frac{1}{F(a)}=\frac{1}{m_o}\cdot\frac{1}{1+\varphi(a)}=\frac{1}{m_o}\,\{1-\varphi(a)+\varphi(a)^2-\varphi(a)^3+\ldots\}$$

Deze reeks zal convergeeren als

$$|\,\varphi(a)\,|<1;$$

als a aangroeit tot ∞, nadert φ tot nul.

$$1-\varphi(a)+\varphi(a)^2-\varphi(a)^3+\ldots$$

is dus als een polynomium te beschouwen.

Wanneer dus $m_o \neq 0$ krijgt men hier als quotient de asymptotische ontwikkeling van $\frac{1}{F(a)}$.

De deeling van twee asymptotische ontwikkelingen is zoodoende teruggebracht tot vermenigvuldiging, onder voorwaarde echter, dat de term m_o van den deeler niet 0 is.

Hebben we de asymptotische ontwikkelingen:

$$F(a)\sim m_o+\frac{m_1}{a}+\frac{m_2}{a^2}+\cdots=S$$

en $$F_1(a)\sim m'_o+\frac{m'_1}{a}+\frac{m'_2}{a^2}+\cdots=S_1$$

dan is de asymptotische ontwikkeling van 't quotient dezer functies:

$$\frac{F_1(a)}{F(a)}\sim\frac{S_1}{m_o}+\frac{S_1}{m_o{}^2}(m_o-S)+\frac{S_1}{m_o{}^3}(m_o-S)^2+\ldots.$$

Digitized by Google

9. Door directe deeling, van de asymptotische ontwikkelingen van twee functies op elkaar, vinden we:

$$\frac{F_1(a)}{F(a)} = \frac{m'_o}{m_o} + \frac{m'_1\, m_o - m'_o\, m_1}{m_o{}^2} \cdot \frac{1}{a} +$$

$$+ \frac{m'_2\, m_o{}^2 - m'_1\, m_o\, m_1 - m'_o\, m_o\, m_2 + m'_o\, m_1{}^2}{m_o{}^3} \cdot \frac{1}{a^2} +$$

$$+ \frac{m'_3\, m_o{}^3 - m'_2\, m_o{}^2 m_1 - m'_1\, m_o{}^2 m_2 + m'_1\, m_o m_1{}^2 - m'_o\, m_o{}^2 m_3 + 2m'_o\, m_o m_1 m_2 - m'_o m_1{}^3}{m_o{}^4} \frac{1}{a^3}$$

$+$ enz.

De $(n+1)^{ste}$ term is:

$$\frac{m'_n\, m_o{}^n - \cdots\cdots + m_o{}^n\, \varepsilon'_n - m'_o\, m_o{}^{n-1}\, \varepsilon_n}{m_o{}^{n+1}} \cdot \frac{1}{a^n}$$

Stel nu: $$\frac{m_o{}^n\, \varepsilon'_n - m'_o\, m_o{}^{n-1}\, \varepsilon_n}{m_o{}^{n+1}} = \eta$$

waar η dus een grootheid voorstelt, die evenals ε_n en ε'_n bij aangroeiende waarde van a, oneindig klein wordt.

Er komt dan:

$$\frac{F_1(a)}{F(a)} = A_o + \frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \cdots + \frac{A_n + \eta}{a^n}$$

d. i. dus de asymptotische ontwikkeling van 't quotient van de gegeven functies. Ook hier zien we dat m_o niet nul mag zijn.

10. Worteltrekking.

Ook zal een zekere machtswortel van een functie, die asymptotisch ontwikkeld kan worden, asymptotisch voorgesteld worden door de wortel van de ontwikkeling van de functie.

Is gegeven:

$$F(a) = m_o + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \cdots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{a^n},$$

dan zal:

Digitized by Google

$$[F(a)]^{1/p} = m_0^{1/p}\left[1 + \frac{m_1}{m_0 a} + \frac{m_2}{m_0 a^2} + \cdots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{m_0 a^n}\right]^{1/p}$$

moeten zijn. Het tweede lid toch mag, volgens 't binomium ontwikkeld worden, want door a groot genoeg te nemen, kan men de waarde van de reeks, die op 1 volgt zoo klein maken als men wil, dus:

$$[F(a)]^{1/p} = m_0^{1/p}\left[1 + \frac{1}{p}\frac{m_1}{m_0 a} + \left\{\frac{1}{p}\frac{m_2}{m_0} + \frac{1}{p}\left(\frac{1}{p} - 1\right)\frac{m_1^2}{2!\, m_0^2}\right\}\frac{1}{a^2} + \cdots\cdots\right]$$

waaruit blijkt:

$$\lim_{a=\infty}\left\{[F(a)]^{1/p} - m_0^{1/p}\right\} = \lim_{a=\infty} \varepsilon = 0$$

$$\lim_{a=\infty} a\left\{[F(a)]^{1/p} - m_0^{1/p} - \frac{1}{p}\frac{m_1}{m_0^{1-1/p}.a}\right\} = 0$$

enz.

m. a. w. $[F(a)]^{1/p}$ is asymptotisch te ontwikkelen en wel volgens de wortel uit de ontwikkeling van $F(a)$.

11. Uit het voorgaande volgt nu, dat een algebraïsche functie van eenige functies, die elk voor zich asymptotisch ontwikkeld kunnen worden, óok voor zulk eene ontwikkeling vatbaar is.

Wanneer dus f een algebraïsche functie voorstelt en verder:

$$F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \ldots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{a^n}$$

$$F_1(a) = m'_0 + \frac{m'_1}{a} + \frac{m'_2}{a^2} + \ldots + \frac{m'_n + \varepsilon'_n}{a^n}$$

$$F_2(a) = m''_0 + \frac{m''_1}{a} + \frac{m''_2}{a^2} + \ldots + \frac{m''_n + \varepsilon''_n}{a^n}$$

enz.

asymptotisch ontwikkelde functies zijn, dan is ook 't tweede lid van:

Digitized by Google

$$f(F, F_1, F_2, F_3, \ldots) = A_o + \frac{A_1}{a} + \frac{A_2}{a^2} + \ldots + \frac{A_n + \eta_n}{a^n}$$

een asymptotische reeks.

12. Integratie.

Nemen we een functie $F(x)$ die asymptotisch ontwikkelbaar is b.v.b.:

$$F(x) = m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} \ldots\ldots + \frac{m_n + \varepsilon_n}{x^n}$$

dan is:

$$\int_a^{a_1} \left\{ F(x) - m_o - \frac{m_1}{x} \right\} dx = \int_a^{a_1} \left\{ \frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{x^3} + \ldots + \frac{m_n}{x^n} \right\} dx + \\ + \int_a^{a_1} \frac{\varepsilon_n}{x^n}\, dx$$

(Wij brengen hier de termen m_o en $\frac{m_1}{x}$ in het eerste lid om integralen te vermijden, die geen zin hebben).

Nu laten we a_1 onbepaald aangroeien en onderzoeken dan, wat er van het tweede lid wordt.

$$\int_a^{\infty} \left\{ F(x) - m_o - \frac{m_1}{x} \right\} dx =$$

$$\frac{m_2}{a} + \frac{1}{2}\frac{m_3}{a^2} + \frac{1}{3}\frac{m_4}{a^3} + \ldots + \frac{1}{n-1}\frac{m_n}{a^{n-1}} + \frac{\varepsilon'_n}{a^{n-1}} \ldots\ldots (\alpha)$$

We zien:

$$mod. \int_a^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{x^n}\, dx < \mu_n \int_a^{\infty} \frac{dx}{x^n}$$

waar μ_n de grootste waarde voorstelt, die ε_n kan krijgen als x 't interval a tot ∞ doorloopt. Dus is:

$$mod. \int_a^{\infty} \frac{\varepsilon_n}{x^n}\, dx = \frac{mod.\ \varepsilon'_n}{a^{n-1}} < \frac{\mu_n}{n-1}\frac{1}{a^{n-1}}$$

zoodat $\varepsilon'_n = \theta \frac{\mu_n}{n-1}$ waar $mod.\ \theta < 1$ is.

Digitized by Google

Hieruit volgt, dat ε'_n tot nul nadert. Bijgevolg is 't tweede lid van (α) werkelijk de asymptotische ontwikkeling van 't eerste lid.

Schrijf de integraal in den vorm:

$$\int_{a_0}^{\infty} \left\{ F(x) - m_0 - \frac{m_1}{x} \right\} dx - \int_{a_0}^{a} \left\{ F(x) - m_0 - \frac{m_1}{x} \right\} dx$$

waar a_0 een bepaald getal is, dan zien we, dat de eerste van deze twee integralen een constante is.

Noemen we deze C_1 dan is:

$$\int_{a}^{\infty} \left\{ F(x) - m_0 - \frac{m_1}{x} \right\} dx = C_1 - \int_{a_0}^{a} F(x)\, dx + \\ + m_0 (a - a_0) + m_1 \log \frac{a}{a_0}$$

waaruit volgt:

$$\int_{a_0}^{a} F(x)\, dx = m_0 a + m_1 \log a + C - \frac{m_2}{a} - \\ - \frac{1}{2} \cdot \frac{m_3}{a^2} - \ldots \frac{1}{n-1} \frac{m_n + \zeta}{a^{n-1}}$$

Door a een bepaalde waarde te geven kan C bepaald worden.

13. Hebben we de asymptotische gelijkheid:

$$\varphi(x, \xi) \backsim f_0 + \xi f_1 + \xi^2 f_2 + \ldots + \xi^n f_n$$

waar f_0, f_1 enz. functies zijn van x alléen of van x en ξ beide en veronderstellen we, dat de uitdrukking:

$$\frac{\varphi - \varphi_n}{\xi^n}$$

waar φ_n de som van de eerste $(n+1)$ termen van de reeks voorstelt, uniform tot nul nadert (wàt ook x zij) als ξ tot 0 nadert, dan is er dus een getal ε te vinden, onafhankelijk van x en alléen afhankelijk van ξ, dat tegelijkertijd 0 wordt met ξ, zóodanig, dat:

$$mod\,(\varphi - \varphi_n) < \xi^n . \varepsilon$$

Digitized by Google

Integreeren we nu:

$$mod \int_{x_0}^{x_1} (\varphi - \varphi_n)\, dx < \xi^n \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon\, dx$$

Daar ε onafhankelijk is van x, wordt dit:

$$mod \int_{x_0}^{x_1} (\varphi - \varphi_n)\, dx < \xi^n \varepsilon (x_1 - x_0)$$

$$mod. \int_{x_0}^{x_1} (\varphi - \varphi_n)\, dx < \xi^n \eta$$

waar $\lim_{\xi = 0} . \eta = 0$ is.

Hieruit volgt de asymptotische gelijkheid:

$$\int \varphi (x, \xi)\, dx \backsim \int f_0\, dx + \xi \int f_1\, dx + \cdots + \xi^n \int f_n\, dx$$

die we wilden bewijzen.

14. Differentiatie mag op asymptotische ontwikkelingen, in 't algemeen, niet toegepast worden. Uit de integratie n.l. volgt dat, wanneer een functie $F(a)$ een asymptotische ontwikkeling heeft, de afgeleide $F'(a)$ tot asymptotische ontwikkeling zal moeten hebben de afgeleide van de asymptotische ontwikkeling van $F(a)$.

Dit gaat dus slechts door voor 't geval, dat $F'(a)$ voor asymptotische ontwikkeling vatbaar is.

Nemen we b.v.b. een functie $F(a)$ zóodanig, dat voor alle waarden van n

$$\lim_{a = \infty} \{ a^n F(a) \} = 0$$

is, dan is zijn asymptotische ontwikkeling identiek nul. De afgeleide van de functie behoeft echter deze eigenschap niet te vertoonen, terwijl de afgeleide van de asymptotische ontwikkeling wèl nul moet zijn. $F'(a)$ is dus niet asymptotisch voor te stellen.

Digitized by Google

Beschouwen we b.v.b.:

$$F(a) = e^{-a} \sin(e^{a^2})$$

Hier is:

$$\lim_{a=\infty} \{a^n e^{-a} \sin(e^{a^2})\} = 0$$

voor alle waarden van n.

De afgeleide van de functie is:

$$e^{-a} . e^{a^2} . 2a . \cos(e^{a^2}) - e^{-a} . \sin(e^{a^2})$$

waarvan de eerste term voor $\lim a = \infty$ niet tot nul nadert; dus kan die afgeleide niet asymptotisch worden voorgesteld.

15. Geval waar differentiatie geoorloofd is.

Als een functie en zijn afgeleide beide door asymptotische reeksen voorgesteld kunnen worden, krijgen we de reeks van de afgeleide functie door de reeks van de functie term voor term te differentieeren.

Hebben we n.l. de asymptotische voorstellingen:

$$F(a) = m_0 + \frac{m_1}{a} + \frac{m_2}{a^2} + \frac{m_3}{a^3} + \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (1)$$

en

$$\frac{dF}{da} = F'(a) = p_0 + \frac{p_1}{a} + \frac{p_2}{a^2} + \frac{p_3}{a^3} + \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

dan is bij definitie:

$$\lim_{a=\pm\infty} F(a) = m_0 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (3)$$

$$\lim_{a=\infty} a \{F(a) - m_0\} = m_1 \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

$$\lim_{a=\infty} a^2 \left\{ F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a} \right\} = m_2 \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

$$\lim_{a=\infty} a^3 \left\{ F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a} - \frac{m_2}{a^2} \right\} = m_3 \ldots \ldots \ldots \quad (6)$$

enz.

Digitized by Google

$$\lim_{a=\infty} a^n \left\{ F(a) - m_0 - \frac{m_1}{a} - \frac{m_2}{a^2} - \ldots - \frac{m_{n-1}}{a^{n-1}} \right\} = m_n \ldots (7)$$

en evenzoo:

$$\lim_{a=\infty} F'(a) = p_0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8)$$

$$\lim_{a=\infty} a^2 \{ F'(a) - p_0 \} = p_1 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

$$\lim_{a=\infty} a^2 \left\{ F'(a) - p_0 - \frac{p_1}{a} \right\} = p_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (10)$$

$$\lim_{a=\infty} a^3 \left\{ F'(a) - p_0 - \frac{p_1}{a} - \frac{p_2}{a^2} \right\} = p_3 \ldots\ldots\ldots (11)$$

$$\lim_{a=\infty} a^n \left\{ F'(a) - p_0 - \frac{p_1}{a} - \ldots - \frac{p_{n-1}}{a^{n-1}} \right\} = p_n \ldots\ldots (12)$$

Wanneer de limiet van een functie van zekere variabele tot een eindige bepaalde waarde, of tot nul nadert, wanneer de variabele tot oneindig nadert, dan zal de limiet van de afgeleide van die functie niet van nul kunnen verschillen.

Zij toch:

$$\lim_{a=\infty} F(a) = m_0$$

dan is óok:

$$\lim_{a=\infty} F(a + \varepsilon) = m_0$$

wat ook ε zij. Dus:

$$\lim_{a=\infty} \frac{\{F(a+\varepsilon) - F(a)\}}{\varepsilon} = 0$$

of als men ε oneindig klein laat worden:

$$\lim_{a=\infty} F'(a) = 0$$

Dit, in verband gebracht met (8), levert ons:

$$p_0 = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (13)$$

Digitized by Google

waardoor (9) overgaat in:

$$\lim_{a=\infty} a\,F'(a) = p_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Door (4) te differentieeren krijgen we:

$$\lim_{a=\infty} \{a\,F'(a) + (F(a) - m_o)\} = 0 \quad \ldots\ldots (15)$$

Uit (3) en (14) volgt echter, dat 't eerste lid van (15) p_1 is. Dus:

$$p_1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (16)$$

Daardoor gaat (10) over in:

$$\lim_{a=\infty} a^2 \{F'(a)\} = p_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (17)$$

Door (5) te differentieeren krijgen we:

$$\lim_{a=\infty} \left[a^2 \left\{F'(a) + \frac{m_1}{a^2}\right\} + 2a \left\{F(a) - m_o - \frac{m_1}{a}\right\}\right] = 0$$

of:

$$\lim_{a=\infty} [a^2 F'(a) + m_1 + 2\{a(F(a) - m_o) - m_1\}] = 0 \quad \ldots (18)$$

Volgens (4) en (17) is 't eerste lid van (18) $p_2 + m_1$ dus moet:

$$p_2 + m_1 = 0$$

zijn of

$$p_2 = -m_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (19)$$

en daardoor gaat (11) over in:

$$\lim_{a=\infty} a^3 \left\{F'(a) + \frac{m_1}{a^2}\right\} = p_3 \quad \ldots\ldots\ldots (20)$$

Door (6) te differentieeren krijgen we:

$$\lim_{a=\infty} \left[a^3 \left\{F'(a) + \frac{m_1}{a^2} + \frac{2m_2}{a^3}\right\} + 3a^2 \left\{F(a) - m_o - \frac{m_1}{a} - \frac{m_2}{a^2}\right\}\right] = 0$$

of:

$$\lim_{a=\infty} \left[a^3 F'(a) + m_1 a + 2m_2 + 3\left\{a^2 \left(F(a) - m_o - \frac{m_1}{a}\right) - m_2\right\}\right] = 0 \ldots (21)$$

Digitized by Google

Volgens (5) en (20) is 't eerste lid van (21) $p_3 + 2m_2$, zoodat dan

$$p_3 + 2m_2 = 0$$

of:
$$p_3 = -2m_2 \ldots\ldots\ldots\ldots (22)$$

Gaan we op deze wijze door, dan vinden we in 't algemeen:

$$p_r = -(r-1)\,m_{r-1} \ldots\ldots\ldots (23)$$

Substitueeren we dit in (2) dan krijgt deze den vorm:

$$F'(a) = -\frac{m_1}{a^2} - \frac{2\,m_2}{a^3} - \frac{3\,m_3}{a^4} - \ldots\ldots$$

die ook verkregen wordt door de termen van de asymptotische reeks van (1) stuk voor stuk te differentieeren.

16. Tweede geval waar differentiatie geoorloofd is.
Zij

$$\varphi(x, \xi)$$

de oplossing van een differentiaalvergelijking:

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y, \xi)$$

met parameter ξ en zij:

$$S = f_o + \xi f_1 + \xi^2 f_2 + \ldots\ldots$$

een divergente reeks, die formeel aan de vergelijking voldoet, terwijl die reeks zóodanig is dat de asymptotische gelijkheid

$$\varphi(x, \xi) \backsim S$$

bestaat d.i. dat:

$$lim\ \frac{\varphi(x, \xi) - f_o - \xi f_1 - \cdots - \xi^n f_n}{\xi^n} = lim\ \varepsilon = 0$$

voor $\xi = 0$

De functies f zijn functies van x en ξ.

Zij nu S' de reeks, die men verkrijgt door S term voor

Digitized by Google

term te differentieeren, dan zal S' formeel aan die differentiaalvergelijking voldoen, die men verkrijgt door de oorspronkelijke differentiaalvergelijking naar x te differentieeren.

Om dit te bewijzen behoeft men slechts op te merken, dat:

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}\right)$$

deelbaar is door ξ^{n+1}, wanneer men weet dat

$$\frac{dy}{dx} - F(x, y, \xi)$$

deelbaar is door ξ^{n+1}

III. Toepassingen.

17. We gaan nu van eenige functies de asymptotische ontwikkelingen zoeken.

Zij gevraagd

$$F(a) = \int_a^\infty e^{a^2-t^2}\,dt$$

te ontwikkelen, waar a positief reëel en de integratieweg óok reëel gesteld wordt.

$$F(a) = \int_a^\infty e^{a^2-t^2}\,dt = -\int_a^\infty \frac{1}{2t}\,d\,e^{a^2-t^2} =$$

$$= \left[-\frac{e^{a^2-t^2}}{2t}\right]_a^\infty - \int_a^\infty e^{a^2-t^2}\frac{1}{2t^2}\,dt =$$

$$= \frac{1}{2a} + \frac{1}{2}\int_a^\infty \frac{1}{2t^3}\,de^{a^2-t^2} = \text{enz.} \cdots =$$

$$= \frac{1}{2a} - \frac{1}{2^2a^3} + \frac{1.3}{2^3.a^5} - \frac{1.3.5}{2^4.a^7} + \cdots \pm \frac{1.3\ldots(2n-3)}{2^n\,a^{2n-1}} \mp$$

$$\mp \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2^n}\int_a^\infty \frac{e^{a^2-t^2}}{t^{2n}}\,dt$$

Digitized by Google

De som van de eerste $(n+1)$ termen noemen we S_n; hier gebruiken we $(n+1)$ termen, waarvan de eerste 0 is. Dus:

$$a^n \{ F(a) - S_n \} = \mp \frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-1)}{2^n} a^n \int_a^\infty \frac{e^{a^2-t^2}}{t^{2n}} dt$$

$$mod.\, a^n \{ F(a) - S_n \} < \frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-1)}{2^n} a^n \int_a^\infty \frac{dt}{t^{2n}}$$

$$< \frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-3)}{2^n} \cdot \frac{a^n}{a^{2n-1}}$$

$$< \frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-3)}{2^n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}}$$

Zoodat dus:

$$\lim_{a=\infty} a^n \{ F(a) - S_n \} < \lim_{n=\infty} \frac{1 . 3 . 5 \dots (2n-3)}{2^n} \cdot \frac{1}{a^{n-1}} = \lim_{a=\infty} \varepsilon = 0$$

18. Zij gegeven:

$$F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c^n}{a+n}$$

waar c een positieve constante < 1 is.

De verhouding van de n^e term tot de $(n-1)^{ste}$ term is kleiner dan 1 als n groot is (behalve wanneer a een negatief geheel getal is) zoodat de reeks convergeert voor alle waarden van a, behalve negatieve geheele waarden.

We nemen voor a positieve waarden grooter dan n; nu is:

$$\frac{1}{a+n} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1+\frac{n}{a}} = \frac{1}{a} \left\{ 1 - \frac{n}{a} + \frac{n^2}{a^2} - \frac{n^3}{a^3} + \dots \right\}$$

Doen we dit voor alle waarden van n en bouwen we daarna de oorspronkelijke reeks hieruit op, dan wordt deze:

$$\frac{A_1}{a} - \frac{A_2}{a^2} + \frac{A_3}{a^3} - \dots \pm \frac{A_n}{a^n} + \dots \text{enz.} \dots \dots \quad (\alpha)$$

Digitized by Google

waar: $A_1 = \sum_{n=1}^{\infty} c^n;\ A_2 = \sum_{n=1}^{\infty} n \,.\, c^n;$ enz.

Reeks (α) divergeert. We kunnen echter aantoonen dat (α) een asymptotische ontwikkeling is van $F(a)$ zoodat $F(a)$ dan berekend kan worden voor groote waarden van a.

Zij:

$$S_p = \frac{A_1}{a} - \frac{A_2}{a^2} + \cdots\cdots + (-1)^p \frac{A_{p+1}}{a^{p+1}}$$

dan is:

$$S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{c^n}{a} - \frac{nc^n}{a^2} + \frac{n^2 c^n}{a^3} + \ldots \frac{(-1)^p n^p c^n}{a^{p+1}} \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left\{ 1 - \left(- \frac{n}{a} \right)^{p+1} \right\} \frac{c^n}{a+n} \right].$$

Dus is:

$$F(a) - S_p = \sum_{n=1}^{\infty} \left(- \frac{n}{a} \right)^{p+1} \frac{c^n}{a+n}$$

$$a^p \left\{ F(a) - S_p \right\} = \frac{(-1)^{p+1}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+1} c^n}{a+n}$$

Nu is: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+1} c^n}{a+n}$ eindig, zoodat:

$$\lim_{a=\infty} a^p \left\{ F(a) - S_p \right\} = \lim_{a=\infty} \frac{(-1)^{p+1}}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{p+1} c^n}{a+n} = 0.$$

19. Gaan we uit van:

$$F(z) = \int_z^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx$$

dan krijgen we door partiëele integratie:

$$\int_z^{\infty} e^{-x} x^{a-1}\, dx = z^{a-1} e^{-z} + (a-1) z^{a-2} e^{-z} +$$

$$+ (a-1)(a-2) z^{a-3} e^{-z} + \cdots + (a-1)(a-2) \ldots (a-n+1) z^{a-n} e^{-z} +$$

$$+ (a-1)(a-2) \ldots (a-n) \int_z^{\infty} e^{-x} x^{a-n-1}\, dx$$

Digitized by Google

waaruit:

$$z^{-a}\, e^{z} \int_z^\infty e^{-x}\, x^{a-1}\, dx = \frac{1}{z} + \frac{a-1}{z^2} + \frac{(a-1)(a-2)}{z^3} + \ldots$$

$$+ \frac{(a-1)(a-2)..(a-n+1)}{z^n} + (a-1)(a-2)..\,(a-n) z^{-a} e^{z} \int_z^\infty e^{-x} x^{a-n-1} dx$$

De eerste term m_0 van de ontwikkeling is 0, dus:

$$z^{n-1} \{ F(z) - S_{n-1} \} = (a-1)(a-2)..(a-n) z^{n-a-1} e^{z} \int_z^\infty e^{-x} x^{a-n-1} dx.$$

Wanneer deze uitdrukking nul tot limiet heeft voor $z = \infty$, dan is de reeksontwikkeling asymptotisch; x beweegt zich tusschen z en ∞, zoodat altijd:

$$x > z.$$

Er volgt uit:

$$z^{n-1} \{ F(z) - S_{n-1} \} < (a-1)(a-2)..(a-n) z^{n-a-1} \int_z^\infty x^{a-n-1} dx$$

$$mod\, z^{n-1} \{ F(z) - S_{n-1} \} < (a-1) \ldots (a-n-1)\, z^{n-a-1}\, z^{a-n}$$

$$< (a-1) \ldots (a-n-1) \cdot \frac{1}{z}$$

Letten we niet op het teeken, dan is dus:

$$\lim_{z=\infty} z^{n-1} \{ F(z) - S_{n-1} \} < \lim_{z=\infty} \frac{(a-1)!}{(a-n-2)!} \frac{1}{z} = 0.$$

20. In

$$f(x) = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}\, dt}{t}$$

is x weder reëel positief en de integratieweg is de reëele as in 't t-vlak.

Door partiëele integratie wordt gevonden:

$$f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} - \frac{3!}{x^4} + \cdot\cdot + (-1)^{n-1} (n-1)! \cdot \frac{1}{x^n} +$$

$$+ (-1)^n\, n! \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+1}}\, dt.$$

Digitized by Google

Noemen we de som van $(n+1)$ termen weer S_n, dán is:

$$f(x) = S_n + (-1)^{n+1}(n+1)!\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt$$

$$mod\ \{f(x) - S_n\} = (n+1)!\int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t^{n+2}}\,dt.$$

Omdat t zich beweegt tusschen x en ∞, is altijd:

$$e^{x-t} < 1$$

zoodat dan:

$$mod\ \{f(x) - S_n\} < (n+1)!\int_x^\infty \frac{dt}{t^{n+2}} = \frac{n!}{x^{n+1}}.$$

Hieruit volgt, als we niet op 't teeken letten:

$$\lim_{x=\infty} x^n \{f(x) - S_n\} < \lim_{x=\infty} \frac{n!}{x} = 0.$$

21. Bij 't zoeken van de asymptotische ontwikkeling van:

$$y = \int_0^\infty \{\log u - \log(1 - e^{-u})\}\,\frac{du}{u}\,e^{-xu}$$

maken we gebruik van de eigenschap, dat een asymptotische reeks geïntegreerd mag worden.

Differenteeren we beide leden naar x, dan komt er:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}\int_0^\infty \{\log u - \log(1 - e^{-u})\}\,de^{-xu} =$$

$$= \frac{1}{x}\Big[e^{-xu}\{\log u - \log(1 - e^{-u})\}\Big]_0^\infty - \frac{1}{x}\int_0^\infty e^{-xu}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{e^u - 1}\right)du$$

Nu is:

$$\lim_{u=\infty}\left[\frac{\log u - \log(1 - e^{-u})}{e^{xu}}\right] = \lim_{u=\infty}\left[\frac{\frac{1}{u} - \frac{e^{-u}}{1 - e^{-u}}}{x\,e^{xu}}\right] = 0$$

want:

Digitized by Google

$$\frac{1}{u} - \frac{1}{e^u - 1} = \frac{1}{u} - \frac{1}{u + \frac{u^2}{2!} + \cdots} = \frac{1}{u}\left[1 - \frac{1}{1 + \frac{u}{2!} + \cdots}\right]$$

verder is:

$$\lim_{u=o}\left[\frac{\log u - \log(1 - e^{-u})}{e^{xu}}\right] = \lim_{u=o}\left[\frac{\frac{1-(1+u)\,e^{-u}}{u\,(1-e^{-u})}}{x\,e^{xu}}\right] = \frac{1}{2x}$$

want:

$$1 - (1+u)\left(1 - u + \frac{u^2}{2!}\cdots\cdots\right) = \frac{u^2}{2}$$

en:
$$u\,(1 - e^{-u}) = u\,(1 - 1 + u \cdots\cdots) = u^2$$

zoodat:

$$\Big[e^{-xu}\,\{\,\log u - \log(1 - e^{-u})\,\}\Big]_o^\infty = -\frac{1}{2x}$$

Hieruit volgt:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\int_o^\infty e^{-xu}\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{e^u - 1}\right)du$$

Door invoering van de getallen van BERNOULLI krijgen we volgens Noot III:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\int_o^\infty e^{-xu}\left[\frac{1}{2} - \frac{B_1}{2!}\cdot u + \frac{B_2}{4!}u^3 - \frac{B_3}{6!}u^5 + \right.$$
$$\left. + \cdots \mp \frac{B_n\,u^{2n-1}}{(2n)!} \pm \theta\,\frac{B_{n+1}\,u^{2n+1}}{(2n+2)!}\right]du$$

$$= -\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}\left[\frac{1}{2}\,\frac{1}{x} - \frac{B_1}{2!}\,\frac{1}{x^2} + \frac{B_2}{4!}\cdot\frac{3!}{x^4} - \frac{B_3}{6!}\,\frac{5!}{x^6} + \right.$$
$$\left. + \cdots \mp \frac{B_n(2n-1)!}{(2n)!\;x^{2n}} \pm \theta\,\frac{B_{n+1}(2n+1)!}{(2n+2)!\,x^{2n+2}}\right]$$

$$= -\frac{1}{x^2} + \frac{B_1}{2}\cdot\frac{1}{x^3} - \frac{B_2}{4\,.\,x^5} + \frac{B_3}{6\,x^7} - \cdots$$
$$\cdots \pm \frac{B_n}{2n\,.\,x^{2n+1}} \mp \theta\,\frac{B_{n+1}}{(2n+2)\,.\,x^{2n+3}}$$

Digitized by Google

Of bij integratie:

$$y = C + \frac{1}{x} - \frac{B_1}{2^2 x^2} + \frac{B_2}{4^2 . x^4} - \frac{B_3}{6^2 x^6} + \cdots$$

$$\cdots \mp \frac{B_n}{(2n)^2 x^{2n}} \pm \theta \frac{B_{n+1}}{(2n+2)^2 x^{2n+2}}$$

of:

$$y \sim C + \frac{1}{x} + \sum_{p=1}^{n} (-1)^p \frac{B_p}{(2p)^2 x^{2p}}$$

22. Asymptotische ontwikkeling van *log* $\Gamma(z)$. [1])

Evenals bij de methode CAUCHY gaan we hier uit van de formule van BINET; we beschouwen de functie voor positieve reëele waarden van z.

$$log\, \Gamma(z) = \left(z - \frac{1}{2}\right) log\, z - z + \frac{1}{2} log\,(2\pi) + \Phi(z)$$

waar

$$\Phi(z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{bg\, tg \left(\frac{x}{z}\right) dx}{e^{2\pi x} - 1}$$

Substitueer hierin de reeks van LEIBNIZ:

$$bg\, tg \frac{x}{z} = \frac{x}{z} - \frac{1}{3} \frac{x^3}{z^3} + \frac{1}{5} \frac{x^5}{z^5} - \frac{1}{7} \frac{x^7}{z^7} + \cdots$$

$$+ \frac{(-1)^{n-1} x^{2n-1}}{(2n-1) z^{2n-1}} + \frac{(-1)^n}{z^{2n-1}} \int_0^x \frac{t^{2n}\, dt}{t^2 + z^2}$$

dan komt er:

$$\Phi(z) = 2 \int_0^{\infty} \frac{\frac{x}{z}\, dx}{e^{2\pi x} - 1} - \frac{2}{3} \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^3}{z^3}\, dx}{e^{2\pi x} - 1} + \frac{2}{5} \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^5}{z^5}\, dx}{e^{2\pi x} - 1} -$$

$$- \frac{2}{7} \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^7}{z^7}\, dx}{e^{2\pi x} - 1} + \cdots + \frac{2(-1)^{n-1}}{2n-1} \int_0^{\infty} \frac{\frac{x^{2n-1}}{z^{2n-1}}\, dx}{e^{2\pi x} - 1} +$$

$$+ 2(-1)^n \int_0^{\infty} \frac{1}{z^{2n-1}} \left\{ \int_0^x \frac{t^{2n}\, dt}{t^2 + z^2} \right\} \frac{dx}{e^{2\pi x} - 1}$$

1) WHITTAKER. Modern Analysis.

Nu is:

$$\int_0^\infty \frac{x^{2n-1}\,dx}{e^{2\pi x}-1} = \frac{1}{4\,n} B_n$$

door dit te substitueeren krijgen we:

$$\Phi\,(z) = 2.\,\frac{B_1}{4\,z} - \frac{2}{3}\cdot\frac{B_2}{4.\,2.\,z^3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{B_3}{4.\,3.\,z^5} - \frac{2}{7}\,\frac{B_4}{4.\,4.\,z^7} + \ldots.$$

$$+ (-1)^{n-1}.\,\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{B_n}{4.\,n\,z^{2n-1}} + (-1)^n\,\frac{2}{z^{2n-1}}\int_0^\infty \left\{ \frac{dx}{e^{2\pi x}-1} \int_0^x \frac{t^{2n}\,dt}{t^2+z^2} \right\}$$

Omdat t^2 positief is, zien we:

$$\int_0^\infty \left\{ \frac{dx}{e^{2\pi x}-1} \int_0^x \frac{t^{2n}\,dt}{t^2+z^2} \right\} < \frac{1}{z^2} \int_0^\infty \left\{ \frac{dx}{e^{2\pi x}-1} \int_0^x t^{2n}\,dt \right\}.$$

want:

$$lim \left(1 + \frac{t^2}{z^2}\right) = 1 + \varepsilon_1$$

Voor de laatste uitdrukking kunnen we schrijven:

$$\frac{1}{(2n+1)\,z^2} \int_0^\infty \frac{x^{2n+1}\,dx}{e^{2\pi x}-1}$$

of:

$$\frac{B_{n+1}}{4\,(n+1)\,(2\,n+1)\,z^2}$$

Maken we hiervan gebruik, dan zien we dat:

$$\Phi\,(z) = 2\,\frac{B_1}{4\,z} - \frac{2}{3}\cdot\frac{B_2}{4.\,2.\,z^3} + \frac{2}{5}\cdot\frac{B_3}{4.\,3.\,z^5} - \ldots.$$

$$+ (-1)^{n-1}\,\frac{2}{2n-1}\cdot\frac{B_n}{4.\,n.\,z^{2n-1}} + (-1)^n\,\frac{2}{z^{2n-1}}\cdot\alpha$$

waarin:

$$\alpha < \frac{B_{n+1}}{4\,(n+1)\,(2\,n+1)\,z^2}$$

Voor groote waarden van z is dus altijd:

$$\alpha < \varepsilon$$

Digitized by Google

waar $\lim_{\varepsilon=\infty} \varepsilon = 0$

Schrijf de ontwikkeling in den vorm:

$$\Phi(z) = S_{2n-1} + (-1)^n \frac{2}{z^{2n-1}} \cdot \alpha$$

dan is:

$$z^{2n-1} \{ \Phi(z) - S_{2n-1} \} = 2\alpha$$

als we niet op 't teeken letten.

Overgaande tot de limiet zien we dan:

$$\lim_{z=\infty} z^{2n-1} \{ \Phi(z) - S_{2n-1} \} < 2. \lim_{z=\infty} \alpha = 0$$

De asymptotische ontwikkeling van $\log \Gamma(z)$ is dus:

$$\log \Gamma(z) \backsim \left(z - \frac{1}{2}\right) \log z - z + \frac{1}{2} \log(2\pi) + \\ + \sum_{n=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1} B_n}{2n(2n-1)} \cdot \frac{1}{z^{2n-1}}$$

23. De asymptotische ontwikkeling van $\Gamma(z)$ [1]) krijgen we uit die van $\log \Gamma(z)$.

$$\Gamma(z) = e^{-z}. z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{1/2} e^{\frac{B_1}{1.2z} - \frac{B_2}{3.4.z^2} + \cdots}$$

$$= e^{-z}. z^{z-\frac{1}{2}} (2\pi)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{C_1}{z} + \frac{C_2}{z^2} + \ldots \right\}$$

waarin:

$$C_1 = \frac{B_1}{1.2}; \quad C_2 = \frac{B_1{}^2}{8} \text{ ; enz.}$$

Door de getalwaarden van de getallen van BERNOULLI te substitueeren krijgen we:

$$\Gamma(z) \backsim e^{-z} z^{z-1/2} (2\pi)^{1/2} \left\{ 1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{2(12z)^2} - \frac{139}{30(12z)^3} - \\ - \frac{571}{120(12z)^4} + \ldots \right\}$$

als asymptotische ontwikkeling van de Γ functie.

---

[1]) WHITTHAKER. Modern Analysis.

Digitized by Google

24. Willen we de asymptotische ontwikkeling bepalen van:

$$log \frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)}$$

(waar ξ positief is.)

dan gaan we uit van de formule van Cauchy:

$$log\, \Gamma(a) = \int_{-\infty}^{o} \left\{ \frac{e^{ax} - e^x}{e^x - 1} - (a-1)\, e^x \right\} \frac{dx}{x}$$

Vervangen wo hierin a door $a+\xi$ dan komt er:

$$log\, \Gamma(a+\xi) = \int_{-\infty}^{o} \left\{ \frac{e^{(a+\xi)x} - e^x}{e^x - 1} - (a+\xi-1)\, e^x \right\} \frac{dx}{x}$$

Door middel van:

$$\int_o^1 \left[\frac{e^{(a+\xi)x} - e^x}{e^x - 1} - (a+\xi-1)\, e^x \right] d\,\xi =$$

$$= \left\{ \frac{\frac{1}{x} e^{ax} \,.\, e^{\xi x}}{e^x - 1} - \frac{\xi\, e^x}{e^x - 1} - (a-1)\,\xi\, e^x - \frac{1}{2}\,\xi^2\, e^x \right\}_o^1 =$$

$$= \frac{1}{x} e^{ax} - \frac{e^x}{e^x - 1} - e^x \left(a - \frac{1}{2} \right)$$

vinden we dan:

$$\int_o^1 log\, \Gamma\,(a+\xi)\, d\,\xi = \int_{-\infty}^{o} \left\{ \frac{e^{ax}}{x} - \frac{e^x}{e^x - 1} - e^x\, (a - 1/2) \right\} \frac{dx}{x}.$$

Uit deze formule en:

$$(\xi - 1/2)\, log\, a = \int_{-\infty}^{o} (\xi - 1/2)\, (e^{ax} - e^x)\, \frac{dx}{x}$$

leiden we af:

$$log\, \Gamma\,(a+\xi) - a\, log\, a + a - log \sqrt{2\pi} - (\xi - 1/2)\, log\, a =$$

$$= \int_{-\infty}^{o} \left\{ \frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} - \xi + \frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right\} e^{ax} \,.\, \frac{dx}{x}.$$

Door hierin $\xi = 0$ te stellen komt er:

Digitized by Google

$$\log \Gamma(a) - a \log a + a - \log \sqrt{2\pi} + \tfrac{1}{2} \log a =$$
$$= \int_{-\infty}^{0} \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \right) e^{ax} . \frac{dx}{x}$$

(d. i. formule (9) van Hoofdstuk I waar x veranderd is in $-x$, zoodat ∞ verandert in $-\infty$, terwijl tevens de grenzen verwisseld zijn en daarna 't teeken veranderd is.)

Door aftrekking vinden we nu:

$$\log \frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} - \xi \log a = \int_{-\infty}^{0} \left\{ \frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} - \xi \right\} \frac{e^{ax}}{x} \, dx.$$

De functie onder 't integraalteeken is eindig voor $\xi < 1$ en wordt nul voor $a = \infty$; zoodat voor $a = \infty$ dadelijk de asymptotische waarde: $\log \dfrac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} \backsim \xi \log a$ wordt gevonden.

We bepalen de ontwikkeling alleen vóor $1 > \xi > 0$. Voeren we nu de polynomia van Bernoulli in, waarvoor we de definitie van Whittaker [1]) nemen. Het polynomium van de n^e orde wordt gedefinieerd als de coëfficient van

$$\frac{t^n}{n!}$$

in de ontwikkeling van:

$$t \,.\, \frac{e^{zt} - 1}{e^t - 1}$$

zoodat we hier dan krijgen:

$$x \frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)\, x^n}{n!}$$

$$\frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)}{n!} x^{n-1}$$

en dus is:

$$\left(\frac{e^{\xi x} - 1}{e^x - 1} - \xi \right) . \frac{1}{x} = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)}{n!} x^{n-2} - \frac{\xi}{x} \right\}.$$

[1]) Modern Analysis. p. 98

Digitized by Google

Dit substitueerende komt er:

$$\log \frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} - \xi \log a = \int_{-\infty}^{0} e^{ax} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(\xi)}{n!} x^{n-2} - \frac{\xi}{x} \right\} dx$$

of:

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi_1(\xi) - \xi}{x} e^{ax}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi_2(\xi)}{2!} e^{ax}\, dx + \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi_3(\xi)}{3!} x\, e^{ax}\, dx +$$

$$+ \int_{-\infty}^{0} \frac{\varphi_4(\xi)}{4!} x^2\, e^{ax}\, dx + \ldots .$$

Uit de definitie der polynomia van BERNOULLI vinden we:

$$\varphi_1(z) = z$$

$$\varphi_2(z) = z^2 - z$$

$$\varphi_3(z) = z^3 - \frac{3}{2} z^2 + 3 B_1 z$$

In 't algemeen is voor $n > 2$:

$$\varphi_n(z) = z^n - \frac{n}{2} z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2!} B_1 z^{n-2} - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!} B_2 z^{n-4}$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-5)}{6!} B_3 z^{n-5} \ldots\ldots\ldots$$

De eerste der integralen van 't tweede lid verdwijnt omdat $\varphi_1(\xi) - \xi = 0$ is; de tweede wordt door de integratiegrenzen $= \frac{1}{a}$.

Letten we nu op:

$$\int_{-\infty}^{0} x^m e^{ax}\, dx = (-1)^m \frac{m!}{a^{m+1}}$$

dan krijgen we ten slotte:

$$\log \frac{\Gamma(a+\xi)}{\Gamma(a)} = \xi \log a + \frac{\varphi_2(\xi)}{1.2\, a} - \frac{\varphi_3(\xi)}{2.3\, a^2} + \frac{\varphi_4(\xi)}{3.4\, a^3} - \frac{\varphi_5(\xi)}{4.5\, a^4} + \ldots$$

Dit is een asymptotische ontwikkeling.

25. Asymptotische ontwikkeling van de Besselsche functie $I_\nu(x)$.

Digitized by Google

We nemen de uitdrukking:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}\,\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\left[\sin\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\times\right.$$

$$\times\left\{\left(1+\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} + \left(1-\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\}du -$$

$$\left. - \cos\left\{x-\frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\int_0^\infty e^{-u}u^{\nu-\frac{1}{2}}\left\{\left(1+\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}} - \left(1-\frac{iu}{2x}\right)^{\nu-\frac{1}{2}}\right\} i\,du\right] \text{ [1]}$$

en beschouwen de functie alléen voor positieve reëele waarden van x.

Zoeken we nu eerst de asymptotische ontwikkeling van:

$$f(u) = \int_0^\infty e^{-u}u^k\left(1+\frac{iu}{2x}\right)^k du$$

waar $k > 0$ is.

Door:

$$\left(1+\frac{iu}{2x}\right)^k = 1 + k\frac{iu}{2x} + \frac{k(k-1)}{2!}\left(\frac{iu}{2x}\right)^2 + \cdots$$

$$+ \frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-n+1)}{n!}\frac{(iu)^n}{(2x)^n} + \frac{k\ldots(k-n)}{n!}\int_0^{\frac{iu}{2x}}\left(\frac{iu}{2x}-t\right)^n(1+t)^{k-n-1}dt$$

te substitueeren, vinden we:

$$f(u) = \int_0^\infty e^{-u}u^k\,du + \sum_{r=1}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{r!}\left(\frac{i}{2x}\right)^r\int_0^\infty e^{-u}u^{k+r}\,du +$$

$$+ \frac{k(k-1)\cdots(k-n)}{n!}\int_0^\infty\left\{e^{-u}u^k\int_0^{\frac{iu}{2x}}\left(\frac{iu}{2x}-t\right)^n(1+t)^{k-n-t}\,dt\right\}du$$

$$= \Gamma(k+1)\left\{1 + \sum_{r=1}^{n}\frac{k(k-1)\ldots(k-r+1)}{r!}\left(\frac{i}{2x}\right)^r(k+r)(k+r-1)\ldots(k+1)\right\} + \alpha$$

waarin:

$$\alpha = \frac{k(k-1)\ldots(k-n)}{n!}\left(\frac{i}{2x}\right)^{n+1}\int_0^\infty\left\{e^{-u}u^k\int_0^u(u-v)^n\left(1+\frac{iv}{2x}\right)^{k-n-1}dv\right\}du.$$

---

[1]) Whittaker. Modern Analysis. p. 290 (gewijzigd).

Digitized by Google

Wanneer $x = \infty$ wordt en n eindig is, nadert α tot een limiet, n.l.:

$$\alpha = \frac{k(k-1)\ldots(k-n)!}{n!}\left(\frac{i}{2x}\right)^{n+1}\int_0^\infty \left\{ e^{-u} u^k \int_0^u (u-v)^n \, dv \right\} du =$$

$$= -\frac{k!}{(k-n-1)!}\cdot\frac{1}{(n+1)!}\left(\frac{i}{2x}\right)^{n+1}\int_0^\infty e^{-u} u^{k+n+1}\, du =$$

$$= \frac{k!}{(k-n-1)!}\cdot\frac{\Gamma(k+n+2)}{(n+1)!}\cdot\left(\frac{i}{2x}\right)^{n+1}.$$

Hieruit volgt nu dat:

$$\lim_{x=\infty} x^n \, . \, \alpha = 0$$

is, d.w.z. de reeks vertoont het kenmerk van een asymptotische ontwikkeling.

De asymptotische ontwikkeling van $f(u)$ is dus:

$$f(u) = \Gamma(k+1)\left\{ 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{(k+r)!}{r!\,(k-r)!}\left(\frac{i}{2x}\right)^r \right\}$$

Bij de ontwikkeling van:

$$f_1(u) = \int_0^\infty e^{-u} u^k \left(1 - \frac{iu}{2x}\right)^k du$$

verandert i alleén en wel in $-i$, zoodat we daarvoor vinden:

$$f_1(u) = \Gamma(k+1)\left\{ 1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{(k+r)!}{r!\,(k-r)!}\left(\frac{-i}{2x}\right)^r \right\}$$

Gaan we nu substitueeren in de voor $I_\nu(x)$ gevonden vorm, dan krijgen we:

$$I_\nu(x) \backsim \frac{\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}{(2\pi x)^{1/2}\,\Gamma\left(\nu+\frac{1}{2}\right)}\left[\sin\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\left\{ 2 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}+r\right)!}{r!\left(\nu-\frac{1}{2}-r\right)!}\,\frac{i^r-(-i)^r}{(2x)^r} - \right.\right.$$

$$\left. - \cos\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\left\{ \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\nu-\frac{1}{2}+r\right)!}{r!\left(\nu-\frac{1}{2}-r\right)!}\,\frac{i^{r+1}-i(-i)^r}{(2x)^r} \right\} \right]$$

Digitized by Google

of:

$$I_\nu(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\sin\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\left\{1 + \sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\nu - \frac{1}{2} + 2r\right)!}{(2r)!\left(\nu - \frac{1}{2} - 2r\right)!} \cdot \frac{(-1)^r}{(2x)^{2r}}\right\} - \right.$$

$$\left. - \cos\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\left\{\sum_{r=1}^{n} \frac{\left(\nu - \frac{3}{2} + 2r\right)!}{(2r-1)!\left(\nu + \frac{1}{2} - 2r\right)!} \cdot \frac{(-1)^r}{(2x)^{2r-1}}\right\}\right].$$

Schrijven we dit uit, dan komt er:

$$I_\nu(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[\left\{1 - \frac{\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\left(\nu-\frac{5}{2}\right)\cdots}{2!\;\left(\nu-\frac{5}{2}\right)\cdots} \cdot \frac{1}{2^2 x^2} + \right.\right.$$

$$+ \frac{\left(\nu+\frac{7}{2}\right)\left(\nu+\frac{5}{2}\right)\left(\nu+\frac{3}{2}\right)\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\left(\nu-\frac{5}{2}\right)\left(\nu-\frac{7}{2}\right)\left(\nu-\frac{9}{2}\right)\cdots}{4!\;\left(\nu-\frac{9}{2}\right)\cdots} \cdot \frac{1}{2^4 x^4} - \cdots$$

$$\left.\cdots\cdots\cdots\cdots\right\} \sin\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\} -$$

$$\left. - \left\{ - \frac{\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{1}{2}\right)\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots}{1!\;\left(\nu-\frac{3}{2}\right)\cdots} \cdot \frac{1}{2x} + \cdots \right\} \cos\left\{x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right\}\right]$$

of:

$$I_\nu(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left[P_n \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_n \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right]$$

waar:

Digitized by Google

$$P_n = 1 + \sum_{r=1}^{\leqslant \frac{n}{2}} \frac{(-1)^r}{(2r)!} \cdot \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)\ldots\ldots(4\nu^2-(4r-1)^2)}{(8x)^{2r}}$$

$$Q_n = \sum_{r=1}^{\leqslant \frac{n+1}{2}} \frac{(-1)^{r+1}}{(2r-1)!} \cdot \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)\ldots(4\nu^2-(4r+1)^2)}{(8x)^{2r-1}}$$ [1])

[1]) P_n en Q_n zijn de reeksen, waarvan N. NIELSEN gebruik maakt in: „Sur une intégrale définie". Math. Ann. Bd. 59. 1904.

Digitized by Google

HOOFDSTUK IV.

BEPALING VAN SOMMIGE ASYMPTOTISCHE ONTWIKKELINGEN DOOR MIDDEL VAN EEN DIFFERENTIAAL VERGELIJKING.

1. De meest algemeene vorm van een differentiaal-vergelijking is:

$$F\left(x\,,y\,,\frac{d\,y}{d\,x}\,,\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\,,\ldots\frac{d^n\,y}{d\,x^n}\right)=0 \quad \ldots\ldots \quad (1)$$

Hieruit is $\frac{d^n\,y}{d\,x^n}$ op te lossen in functie van de overige grootheden. Differentieeren we naar x, dan krijgen we $\frac{d^{n+1}\,y}{d\,x^{n+1}}$ in diezelfde grootheden uitgedrukt, daar de nieuw optredende $\frac{d^n\,y}{d\,x^n}$ door de eerstgevonden waarde vervangen wordt.

Geven we nu x een bepaalde waarde α en veronderstellen we, dat we voor $x=\alpha$ substitueerend, krijgen:

$$y_\alpha=\alpha_0 \quad ; \quad \left(\frac{d\,y}{d\,x}\right)_\alpha=\alpha_1 \quad ; \quad \left(\frac{d^2\,y}{d\,x^2}\right)_\alpha=\alpha_2 \quad ;\ldots$$

$$\left(\frac{d^{n-1}\,y}{dx^{n-1}}\right)_\alpha=\alpha_{n-1}$$

dan volgen hieruit en de gevonden uitdrukkingen voor:

$$\left(\frac{d^n\,y}{d\,x^n}\right)_\alpha \quad ; \quad \left(\frac{d^{n+1}\,y}{d\,x^{n+1}}\right)_\alpha \text{ enz.}$$

waarden voor deze differentiaalquotienten.

Digitized by Google

Stellen we

$$y = \varphi(x)$$

dan krijgen we de uitdrukking:

$$y = \varphi(x) = \varphi \left\{ \alpha + (x - \alpha) \right\} =$$

$$= \varphi(\alpha) + (x - \alpha)\varphi'(\alpha) + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}\varphi''(\alpha) + \ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\varphi^{(n)}(\alpha) + \ldots \quad (2)$$

waarin $\varphi^{(n)}(\alpha)$ de waarde van $\frac{d^n y}{d x^n}$ is, als x daarin door α is vervangen.

De reeks is dus te schrijven als:

$$y = \alpha_0 + (x - \alpha)\alpha_1 + \frac{(x-\alpha)^2}{2!}\alpha_2 + \ldots + \frac{(x-\alpha)^n}{n!}\alpha_n + \ldots \quad (3)$$

welke formeel aan vergelijking (1) voldoen zal.

De coëfficienten α_n, α_{n+1}, enz. zijn volgens het boven gezegde te bepalen, wanneer we slechts α_0, $\alpha_1 \ldots \alpha_{n-1}$, kennen.

2. Nemen we als voorbeeld de vergelijking:

$$x^2 \frac{dy}{dx} = ax + by \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

dan willen we een reeks voor y vinden, die formeel aan de vergelijking voldoet. Stel dat voor $x = 0$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 \neq 0$$

is, dan moet

$$y_\alpha = \alpha_0 = 0$$

zijn. Uit de gegeven vergelijking volgt:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{ax + by}{x^2} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5)$$

of

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = \left(\frac{ax + by}{x^2}\right)_{\substack{x=0\\y=0}} = \left(\frac{a + b\frac{dy}{dx}}{2x}\right)_{x=0} \quad \ldots (6)$$

Digitized by Google

dit geeft:

$$\left(2x\frac{dy}{dx}\right)_o = \left(a + b\frac{dy}{dx}\right)_o$$

$$(2x-b)_o \left(\frac{dy}{dx}\right)_o = a$$

of

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_o = -\frac{a}{b}$$

Uit (5) vinden we door differentiatie:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \frac{x\left(a+b\frac{dy}{dx}\right) - 2(ax+by)}{x^3}$$

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o = \left(\frac{b x \frac{d^2 y}{d x^2} - \left(a + b\frac{dy}{dx}\right)}{3 x^2}\right)_o.$$

Door hierin (6) te gebruiken, komt er:

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o = \left(\frac{b\frac{d^2 y}{d x^2} - 2\frac{dy}{dx}}{3x}\right)_o$$

waaruit volgt:

$$\left(3x\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o = \left(b\frac{d^2 y}{d x^2} - 2\frac{dy}{dx}\right)_o$$

of

$$\left(\frac{d^2 y}{d x^2}\right)_o = -\frac{2a}{b^2}$$

Zoo doorgaande krijgen we als oplossing:

$$y = -\left\{\frac{a}{b}x + \frac{a}{b^2}x^2 + 1.2\frac{a}{b^3}x^3 + \ldots + (n-1)!\frac{a}{b^n}x^n + .\right\}. \quad (7)$$

die formeel aan (4) voldoet.

3. Nemen we nu weer de vergelijking (1):

Digitized by Google

$$F(x, y, y', y'', \dots y^{(n)}) = 0$$

en berekenen we de afgeleiden van y voor $x = 0$ door naar x totaal te differenteeren en voorwaarden te stellen, dan krijgen we een vorm:

$$y = y_o + \frac{y'_o}{1.} x + \frac{y''_o}{2!} x^2 + \cdots$$

Is deze reeks convergent in zeker gebied, dan stelt ze in dit gebied een integraal voor.

Immers, als we y door deze uitdrukking vervangen in F dan zal men een functie van x verkrijgen, n.l.:

$$F = A_o + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots$$

Bij hypothese zijn y en zijne afgeleiden zóo gekozen, dat F en zijne afgeleiden nul zijn voor $x = 0$. Deze afgeleiden zijn voor $x = 0$ A_o, A_1, A_2 ..... dus is de ontwikkeling van F identiek nul, waaruit volgt, dat de aldus bepaalde waarde voor y een integraal van de vergelijking is.

4. Stel nu, dat de gegeven differentiaalvergelijking een integraal heeft, die asymptotisch ontwikkeld kan worden b.v.b.:

$$y \backsim m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \cdots + \frac{m_n}{x^n} \; \dots\dots \; (8)$$

Hebben bovendien de afgeleiden van y tot de n^e toe, elk eene asymptotische ontwikkeling, dan zal (8) formeel aan

$$F = 0$$

voldoen. Drukken we n.l.

$$y, \; y', \; y'', \dots \; y^{(n)}$$

uit op de wijze, zooals we dit veronderstellen en substitueeren we deze ontwikkelingen in F dan zal men, door de bewerkingen uit te voeren, die door F worden voorgesteld, de asymptotische ontwikkeling van F krijgen: deze is echter identiek nul, want (8) is een integraal.

Digitized by Google

Hieruit blijkt dan, dàt de asymptotische ontwikkeling van y formeel voldoet aan

$$F = 0.$$

Wanneer er dus integralen bestaan, die door asymptotische reeksen kunnen worden voorgesteld, dan voldoen deze reeksen formeel aan de differentiaalvergelijking.

De asymptotische ontwikkelingen van de integralen moeten dus gezocht worden onder de asymptotische reeksen, die formeel aan de vergelijking voldoen.

Wanneer echter een asymptotische ontwikkeling en de afgeleiden er van de functie F niet identiek nul maken, maar er een ontwikkeling aan geven, die asymptotisch nul is, dan zal de gegeven ontwikkeling niet formeel aan de vergelijking voldoen en dus ook géen asymptotische ontwikkeling van een integraal van de vergelijking kunnen zijn.

5. Door middel van het voorgaande zijn we somtijds in staat de asymptotische ontwikkeling eener functie, die zulk eene ontwikkeling bezit, te vinden, wanneer een differentiaalvergelijking bepaald kan worden, waarvan de functie een integraal is.

Zij b.v.b.:

$$y = e^{-x} \int_0^1 \frac{e^{xz} - 1}{z} \, dz$$

Deze functie bezit een asymptotische ontwikkeling, zooals we vroeger (Hoofdst. II. 2) zagen. Door differentiatie vinden we:

$$\frac{dy}{dx} = - e^{-x} \int_0^1 \frac{e^{xz} - 1}{z} \, dz + e^{-x} \int_0^1 e^{xz} \, dz$$

dus:

$$\frac{dy}{dx} + y = e^{-x} \int_0^1 e^{xz} \, dz$$

of:

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{1}{x} (1 - e^{-x})$$

Digitized by Google

De asymptotische ontwikkeling van de gegeven functie moet nu gezocht worden onder de asymptotische ontwikkelingen, die formeel aan deze differentiaal-vergelijking voldoen.

Zal nu de asymptotische ontwikkeling:

$$y \backsim m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \ldots + \frac{m_n}{x^n}$$

bestaan, die aan de gevonden vergelijking voldoet, dan moet:

$$\frac{dy}{dx} \backsim - \frac{m_1}{x^2} - \frac{2m_2}{x^3} \ldots\ldots$$

en dus:

$$\frac{dy}{dx} + y = m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2 - m_1}{x^2} + \frac{m_3 - 2m_2}{x^3} + \ldots.$$

De asymptotische ontwikkeling van het tweede lid moet herleid worden tot $\frac{1}{x}$. Dit eischt:

$m_o = 0$; $m_1 = 1$; $m_2 = m_1$; $m_3 = 2m_2$; enz. zoodat de eenige asymptotische ontwikkeling, die voor y gevonden wordt is:

$$y \backsim \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} + \frac{3\,!}{x^4} + \ldots.$$

welke overeenkomt met de vroeger gevondene.

6. Eveneens vinden we de ontwikkeling van:

$$F(x) = \int_x^\infty e^{x^2 - t^2}\, dt = y$$

Differentieeren we, dan wordt:

$$\frac{dy}{dx} = -1 + \int_x^\infty 2x\, e^{-x^2 - t^2}\; dt$$

waaruit:

$$2\,x\,y - \frac{dy}{dx} = 1$$

Digitized by Google

Stel nu:

$$y \sim m_0 + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \ldots.$$

dan vinden we bij substitutie:

$$2\, m_0 = 0$$

$$2\, m_1 = 1 \quad \text{enz.}$$

waaruit dan volgt:

$$m_0 = 0\,;\; m_1 = {}^1/_2\,;\; m_2 = 0;\; m_3 = {}^{-1}/_4\,, \quad \text{enz.}$$

zoodat de ontwikkeling wordt:

$$F(x) \sim \frac{1}{2x} - \frac{1}{2^2\, x^3} + \frac{1.\,3}{2^3.\, x^5} - \frac{1.\,3.\,5}{2^4.\, x^7} + \ldots.$$

evenals in Hoofdstuk III. 14. gevonden is.

7. Ook nog:

$$F(x) = \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\, dt = y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x} + \int_x^\infty \frac{e^{x-t}}{t}\, dt$$

waaruit de differentiaal vergelijking volgt:

$$y - \frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$$

Stel weer:

$$y \sim m_0 + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{x^3} + \ldots.$$

dan krijgen we bij substitutie:

$$m_0 = 0\,;\; m_1 = 1\,;\; m_2 = -1\,;\; m_3 = 2\,!\,;\; m_4 = -3\,!\,; \quad \text{enz.}$$

zoodat de ontwikkeling wordt:

$$F(x) \sim \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} - \frac{3\,!}{x^4} + \ldots.$$

zooals ook vroeger in Hoofdst. III. 17 gevonden is.

Digitized by Google

HOOFDSTUK V.

TOEPASSINGEN OP DIFFERENTIAAL VERGELIJKINGEN.

---

1. Fuchs heeft bewezen, dat de noodzakelijke en voldoende voorwaarde, opdat de integralen van de vergelijking:

$$\frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0 \; \ldots\ldots \quad (1)$$

voor $x = \infty$ niet onbepaald zijn, daarin bestaat, dat in de nabijheid van $x = \infty$ de coëfficienten ontwikkeld kunnen worden in convergente reeksen van den vorm:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \frac{a_3}{x^3} + \ldots\ldots \\ p_2 = \frac{b_2}{x^2} + \frac{b_3}{x^3} + \frac{b_4}{x^4} + \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m = \frac{l_m}{x^m} + \frac{l_{m+1}}{x^{m+1}} + \frac{l_{m+2}}{x^{m+2}} + \ldots \end{array}\right\} \ldots\ldots \quad (2)$$

waar a, b, c,... constante getallen zijn.

In dit geval zal iedere integraal de eigenschap bezitten, dat ze niet oneindig wordt, wanneer ze met een bepaalde macht (afhangende van den aard der vergelijking) van x vermenigvuldigd wordt.

Deze integralen hebben gewoonlijk den vorm:

Digitized by Google

$$x^r \left\{ c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (3)$$

waarin de waarde van r bepaald wordt door de vergelijking:

$$r(r+1)(r+2)\cdots(r+m-1) - a_1 r(r+1)\cdots$$
$$\cdots(r+m-2) + b_2 r(r+1)\cdots(r+m-3) - \cdots \pm l_m = 0.$$

Zijn er onder de wortels van deze vergelijking eenige, wier verschillen geheele getallen zijn, dan correspondeeren met deze groep wortels, integralen van den vorm:

$$x^{r_\alpha}\left[\varphi_1\left(\frac{1}{x}\right) + \varphi_2\left(\frac{1}{x}\right) \log x + \cdots + \varphi_{\mu-1}\left(\frac{1}{x}\right) \log^{\mu-1} x\right] \cdots (4)$$

waarin $\varphi_i\left(\frac{1}{x}\right)$ convergente reeksen zijn van den vorm:

$$c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \quad \ldots\ldots\ldots \quad (5)$$

De integralen heeten dan alle regulier in de nabijheid van $x = \infty$.

2. Stellen we nu, dat nabij $x = \infty$:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \ldots \\ p_1 = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k = k_0 + \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2} + \ldots \\ p_m = l_0 + \frac{l_1}{x} + \frac{l_2}{x^2} + \ldots \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (6)$$

dan kunnen de integralen *niet* alle regulier zijn.

Substitueeren we dan in (1):

$$y = e^{\alpha x} . u \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

dan komt er:

Digitized by Google

$$\alpha^m u + \frac{m}{1} \alpha^{m-1} \frac{du}{dx} + \frac{m(m-1)}{2!} \alpha^{m-2} \frac{d^2u}{dx^2} + $$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{3!} \alpha^{m-3} \frac{d^3u}{dx^3} + \dots$$
$$+ \left(a_o + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots\right) \left\{ \alpha^{m-1} u + \frac{m-1}{1!} \alpha^{m-2} \frac{du}{dx} + \right.$$
$$\left. + \frac{(m-1)(m-2)}{2!} \alpha^{m-3} \frac{d^2u}{dx^2} + \cdots \right\} +$$
$$+ \left(b_o + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x^2} + \dots\right) \left\{ \alpha^{m-2} u + \frac{m-2}{1!} \alpha^{m-3} \frac{du}{dx} + \right.$$
$$\left. + \frac{(m-2)(m-3)}{2!} \alpha^{m-4} \frac{d^2u}{dx^2} + \cdots \right\} +$$
$$+ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots +$$
$$+ \left(k_o + \frac{k_1}{x} + \frac{k_2}{x^2} + \cdots\right)\left\{\alpha u + \frac{du}{dx}\right\} + \left(l_o + \frac{l_1}{x} + \frac{l_2}{x^2} + \cdots\right) u = 0 \cdots (8)$$

De coëfficient van u, voor zoover die niet afhangt van x, is dus:

$$\alpha^m + a_o \alpha^{m-1} + b_o \alpha^{m-2} + \cdots + k_o \alpha + l_o \quad \dots . (9)$$

Bepalen we nu de waarde van α zóodanig, dat dit stuk nul wordt, dan vinden we m waarden

$$\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \dots . \ \alpha_m$$

Stellen we dan:

$$y = e^{\alpha_1 x} . u$$

dan krijgt de vergelijking bij substitutie den vorm:

$$\frac{d^m u}{dx^m} + \left(a'_o + \frac{a'_1}{x} + \frac{a'_2}{x^2} + \cdots\right) \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + \dots\dots$$
$$+ \left(s'_o + \frac{s'_1}{x} + \frac{s'_2}{x^2} + \cdots\right) \frac{d^2u}{dx^2} +$$
$$+ \left(k'_o + \frac{k'_1}{x} + \frac{k'_2}{x^2} + \cdots\right) \frac{du}{dx} + \left(\frac{l'_1}{x} + \frac{l'_2}{x^2} + \cdots\right) u = 0$$

Digitized by Google

Trachten we aan deze vergelijking formeel te voldoen door een reeks van den vorm:

$$u = x^{\varrho_1} \left\{ A_o + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \cdots \right\}$$

waar $A_o \neq 0$ is en waarin ϱ_1 zóo bepaald wordt dat de coëfficient van den term, waarin de hoogste macht van x voorkomt (d. i. dus $x^{\varrho_1 - 1}$) nul wordt. Bedoelde coëfficient is:

$$A_o \, (k_o' \, \varrho_1 + l_1')$$

zoodat:

$$\varrho_1 = - \frac{l_1'}{k_o'}$$

gekozen moet worden, terwijl A_o willekeurig is.

Nu worden de achtereenvolgende coëfficienten A_1, A_2, enz. bepaald.

De coëfficienten van $x^{\varrho_1 - 2}$, $x^{\varrho_1 - 3}$, $x^{\varrho_1 - 4}$ en $x^{\varrho_1 - 5}$ zijn:

$$A_o \{ l_2' + k_1' \varrho_1 + s_o' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) \} + A_1 k_o' (\varrho_1 - 1) \ldots . \; (x^{\varrho_1 - 2})$$

$$\begin{aligned} & A_o \{ l_3' + k_2' \varrho_1 + s_1' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) + t_o' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) \} + \\ & + A_1 \{ l_2' + k_1' (\varrho_1 - 1) + s_o' (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) \} + \\ & + A_2 \{ l_1' + k_o' (\varrho_1 - 2) \} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; (x^{\varrho_1 - 3}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_o \{ l_4' + k_3' \varrho_1 + s_2' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) + t_1' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) + \\ & \qquad + r_o' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) \} + \\ & + A_1 \{ l_3' + k_2' (\varrho_1 - 1) + s_1' (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) + t_o' (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) \} + \\ & + A_2 \{ l_2' + k_1' (\varrho_1 - 2) + s_o' (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) \} + \\ & + A_3 \{ l_1' + k_o' (\varrho_1 - 3) \} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; (x^{\varrho_1 - 4}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & A_o \{ l_5' + k_4' \varrho_1 + s_3' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) + t_2' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) + \\ & \qquad r_1' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) + q_o' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) (\varrho_1 - 4) \} + \\ & + A_1 \{ l_4' + k_3' (\varrho_1 - 1) + s_2' (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) + t_1' (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) + \\ & \qquad + r_o' (\varrho_1 - 1) (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) (\varrho_1 - 4) \} + \\ & + A_2 \{ l_3' + k_2' (\varrho_1 - 2) + s_1' (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) + t_o' (\varrho_1 - 2) (\varrho_1 - 3) (\varrho_1 - 4) \} + \\ & + A_3 \{ l_2' + k_1' (\varrho_1 - 3) + s_o' (\varrho_1 - 3) (\varrho_1 - 4) \} + \\ & + A_4 \{ l_1' + k_o' (\varrho_1 - 4) \} \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \; (x^{\varrho_1 - 5}) \end{aligned}$$

Digitized by Google

In 't algemeen is de coëfficient van $x^{\varrho_1 - n}$:

$$A_0 \{ l_n' + k'_{n-1} \varrho_1 + \ldots + h_0' \varrho_1 (\varrho_1 - 1) \ldots (\varrho_1 - n + 1) \} +$$
$$A_1 \{ l'_{n-1} + k'_{n-2} (\varrho_1 - 1) + s'_{n-3} (\varrho_1 - 1)(\varrho_1 - 2) + \ldots \} +$$
$$A_2 \{ l'_{n-2} + k'_{n-3} (\varrho_1 - 2) + s'_{n-4} (\varrho_1 - 2)(\varrho_1 - 3) + \ldots \} +$$
$$+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$+ A_{n-2} \{ l_2' + k_1' (\varrho_1 - n + 2) + s_0' (\varrho_1 - n + 2)(\varrho_1 - n + 1) \}$$
$$+ A_{n-1} \{ l_1' + k_0' (\varrho_1 - n + 1) \}$$

Men vindt dus een reeks:

$$y = e^{\alpha_1 x} x^{\varrho_1} \left\{ A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right\}$$

en $m-1$ analoge ontwikkelingen, die correspondeeren met de wortels α_2, α_3, ... α_m.

3. Deze ontwikkelingen zijn in 't algemeen divergent; ze voldoen formeel aan de differentiaal vergelijking, maar zijn geen integralen.

Dat ze echter niet zonder beteekenis zijn en voor de bepaling der waarden der integralen, voor groote waarden van x, gebruikt kunnen worden, heeft Poincaré aangetoond. De belangrijkheid van dit resultaat blijkt daaruit, dat vele reeksen, die in de theoretische sterrekunde gebezigd worden, divergent zijn.

4. Nemen we[1]) een differentiaalvergelijking van den vorm:

$$p_0 \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + p_{m-1} \frac{dy}{dx} + p_m y = 0 \quad \ldots (10)$$

waarin de coëfficiënten p polynomia van den n^{den} graad zijn en beschouwen we 't eenvoudigste geval, n.l.: $n = 1$. We trachten y uit te drukken door middel van een integraal

$$y = \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} v(z)\, e^{zx}\, dz \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (11)$$

[1]) Picard. Traité d'Analyse. III.

Digitized by Google

waar de grenzen ζ_0 en ζ_1 onafhankelijk van x zijn (deze worden later bepaald) en waar $\nu(z)$ een functie van z is. Differentieeren we telkens naar x, dan vinden we:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \nu(z)\, z\, e^{zx}\, dz \\
\frac{d^2 y}{dx^2} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \nu(z)\, z^2\, e^{zx}\, dz \\
&\dots\dots\dots\dots \\
\frac{d^m y}{dx^m} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \nu(z)\, z^m\, e^{zx}\, dz
\end{aligned}\right\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

Nu berekenen we de producten

$$x\,y \quad ; \quad x\frac{dy}{dx} \quad ; \dots x\frac{d^m y}{dx^m}\,.$$

Door partiëele integratie wordt gevonden:

$$\left.\begin{aligned}
x.\,y &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \nu(z)\, x\, e^{zx}\, dz = \Big[\nu(z)\, e^{zx}\Big]_{\zeta_0}^{\zeta_1} - \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{d\nu(z)}{dz}\, e^{zx}\, dz \\
x\frac{dy}{dx} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \nu(z)\, x\, z\, e^{zx}\, dx = \Big[\nu(z).\, z\, e^{zx}\Big]_{\zeta_0}^{\zeta_1} - \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{d(\nu(z).\, z)}{dz}\, e^{zx}\, dz \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
x\frac{d^m y}{dx^m} &= \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \nu(z)\, x.\, z^m\, e^{zx}\, dx = \Big[\nu(z).\, z^m\, e^{zx}\Big]_{\zeta_0}^{\zeta_1} - \int_{\zeta_0}^{\zeta_1} \frac{d(\nu(z).\, z^m)}{dz}\, e^{zx}\, dz
\end{aligned}\right\} (13).$$

De functie $\nu(z)$ en de constanten ζ_0 en ζ_1 denken we ons nu zóo gekozen, dat

$$\Big[\nu(z)\, e^{zx}\Big]_{\zeta_0}^{\zeta_1} = 0 \ ; \ \Big[\nu(z)\, z\, e^{zx}\Big]_{\zeta_0}^{\zeta_1} = 0 \ ; \text{enz.} \ \Big[\nu(z)\, z^m\, e^{zx}\Big]_{\zeta_0}^{\zeta_1} = 0.$$

Zetten we de coëfficienten van de gegeven vergelijking in den vorm:

$$p_0 = a_0 x + b_0 \ ; \ p_1 = a_1 x + b_1 \ ; \ \dots \ p_m = a_m\, x + b_m$$

dan wordt de vergelijking, door gebruik te maken van (12) en (13):

Digitized by Google

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1}\left[-a_0\frac{d(\nu(z)z^m)}{dz}+b_0\,\nu(z).\,z^m-a_1\frac{d(\nu(z)z^{m-1})}{dz}+b_1\nu(z).\,z^{m-1}-\right.$$
$$\left.-\ldots-a_m\frac{d\,\nu(z)}{dz}+b_m\,\nu(z)\right]e^{zx}\,dz=0.$$

De uitdrukking onder 't integraalteeken nul stellend, komt er:

$$(a_0 z^m+a_1 z^{m-1}+\ldots+a_{m-1}z+a_m)\frac{d\nu}{dz}-$$
$$-[b_0 z^m-(a_0 m-b_1)z^{m-1}-(a_1(m-1)-b_2)z^{m-2}+\ldots+b_m]\,\nu=0$$

of:

$$P(z)\frac{d\nu(z)}{dz}-Q(z)\,\nu(z)=0$$

waaruit volgt:

$$\frac{1}{\nu(z)}\,\frac{d\nu(z)}{dz}=\frac{Q(z)}{P(z)}=\mu+\frac{k_1}{z-\alpha_1}+\ldots+\frac{k_m}{z-\alpha_m}.$$

Hierin is $\mu=\frac{b_0}{a_0}$ en stellen $\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_m$ de wortels voor van

$$P(z)=0$$

(aannemende, dat $P(z)$ géen dubbele wortels heeft).

Integreerende komt er:

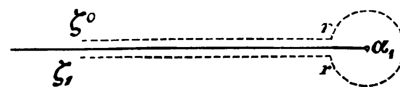
$$\log(\nu(z))=\mu z+k_1\log(z-\alpha_1)+k_2\log(z-\alpha_2)+\ldots+k_m\log(z-\alpha_m)$$

of:

$$\nu(z)=e^{\mu z}(z-\alpha_1)^{k_1}(z-\alpha_2)^{k_2}\ldots(z-\alpha_m)^{k_m}.$$

5. We nemen aan, dat er geen enkele betrekking bestaat tusschen de coëfficienten van (10).

Beschouw één der punten α b.v.b. α_1 en trek door dit punt in de richting van de negatieve ξ-as een lijn evenwijdig aan de (reëele) ξ-as na $z=\xi+i\eta$ gesteld te hebben.



Als integratieweg nemen we een lus beginnende in 't punt $-\infty$ op de ξ-as; het punt ζ_0 beteekent nu

Digitized by Google

in de figuur het punt $-\infty$ op de ξ-as. De lus geeft dan als integratieweg: $\zeta_0\, r +$ cirkel C, met straal r om α_1 als middelpunt, $+ r\, \zeta_1$.

Het punt ζ_1 valt in 't oneindige met ζ_0 op de ξ-as samen.

Veronderstellen we verder, dat 't reëele deel van x grooter is dan dat van $-\mu$ d. w. z. de correspondeerende integraal:

$$\int_{\zeta_0}^{\zeta_1} e^{uz} (z-\alpha_1)^{k_1} (z-\alpha_2)^{k_2} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} e^{zx}\, dz$$

zal dan een zin hebben (omdat $x + \mu < 0$ is) en de voorwaarden:

$$\left[\nu(z)\, e^{zx}\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1} = 0\ ;\ \left[\nu(z)\, z e^{zx}\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1} = 0 \ldots \left[\nu(z) . z^m e^{zx}\right]_{\zeta_0}^{\zeta_1} = 0$$

zullen vervuld zijn. Zóo krijgen we dan m integralen van de gegeven vergelijking.

6. Gaan we nu na, hoe die integralen zich gedragen voor groote positieve waarden van x.

Aan de algemeenheid wordt niets te kort gedaan door $\alpha_1 = 0$ te veronderstellen en x te vervangen door $x - \mu$, daar μ eindig is en x zeer groot genomen wordt; d. w. z. we stellen $\mu = 0$ ten opzichte van x.

We krijgen dan de integraal:

$$\int_{-\infty\, C - \infty} z^{k_1} (z-\alpha_2)^{k_2} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} e^{zx}\, dz$$

Deze bestaat uit drie deelen, n.l.:

$$I_1 = \int_{-\infty}^{-r} z^{k_1} (z-\alpha_2)^{k_2} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} e^{zx}\, dz$$

$$I_2 = \int_C z^{k_1} (z-\alpha_2)^{k_2} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} e^{zx}\, dz$$

$$I_3 = \int_{-r}^{-\infty} z^{k_1} (z-\alpha_2)^{k_2} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} e^{zx}\, dz$$

Digitized by Google

I_1 nadert tot nul, wanneer x, positief zijnde, onbepaald toeneemt. Voor z negatief en kleiner dan $-r$ ziet men:

$$| z^{k_1} (z-\alpha_2)^{k_2} \ldots (z-\alpha_m)^{k_m} | < e^{-\varepsilon z}$$

waar ε een positieve grootheid is.

De integraal zal dus een absolute waarde hebben, die kleiner is dan:

$$\int_{-r}^{-\infty} e^{z(x-\varepsilon)} dz$$

d. i.

$$\frac{e^{-r(x-\varepsilon)}}{x-\varepsilon}$$

en nadert dus tot nul voor $\lim x = \infty$.

Evenzoo nadert het product van de integraal met x^γ, waar γ een willekeurige constante is, tot nul, voor $\lim x = \infty$.

Hetzelfde geldt voor I_3, zoodat I_2 nog te onderzoeken overblijft.

Beschouwen we hiertoe eerst de integraal:

$$\int_C z^{k_1} e^{zx} dz$$

en zoeken we de limiet van 't product:

$$x^{k_1+1} \int_C z^{k_1} e^{zx} dz$$

voor $x = \infty$.

Stel $zx = -y$; op een getal factor na komt er dan:

$$\int y^{k_1} e^{-y} dy$$

langs een cirkel K met straal rx, uitgaande van een punt rx in 't vlak van de complexe variabele y. We vinden dan:

$$\int_K y^{k_1} e^{-y} dy = \int_{rx}^{o} e^{-y} y^{k_1} dy + \int_{o}^{rx} e^{2\ ik_1} e^{-y} y^{k_1} dy =$$

$$= (e^{2\pi ik_1} - 1) \int_{o}^{rx} e^{-y} y^{-k_1} dy$$

Digitized by Google

voor $x = \infty$, wordt dit:

$$(e^{2\pi i k_1} - 1) . \Gamma(k_1 + 1)$$

Dit product is niet nul, behalve wanneer k_1 een positief geheel of nul is, want in dit geval is

$$(e^{2\pi i k_1} - 1) = 0$$

en $\Gamma(k_1 + 1) \neq 0$.

Is k_1 een negatief geheel dan wordt: $\Gamma(k_1 + 1) = \infty$ en dus 't product niet nul.

Gaan we nu terug tot de oorspronkelijke integraal.

Voor voldoend kleine modulus van z, zullen we:

$$z^{k_1} (z - \alpha_2)^{k_2} \ldots (z - \alpha_m)^{k_m}$$

ontwikkelen in een reeks van den vorm:

$$A_0 z^{k_1} + A_1 z^{k_1+1} + A_2 z^{k_1+2} + \cdots\cdots$$

Alleen de eerste term van deze reeks geeft voor $x = \infty$ een limiet die van nul verschilt, als de reeks vermenigvuldigd is met x^{k_1+1} ('t geval k_1 = positief geheel of nul wordt uitgesloten).

Nemen we de straal r van de cirkel C voldoende klein en beschouwen we weer:

$$x^{k_1+1} \int_C \{ A_0 z^{k_1} + A_1 z^{k_1+1} + \cdots \} e^{zx} dz$$

We breken de reeks

$$A_0 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots .$$

af bij $A_n z^n$ zoodat de rest dan R_n is.

Nu zijn er altijd twee getallen μ en ϱ zóodanig te bepalen, dat:

$$| A_n | < \mu . \varrho^n$$

Dan kunnen we opschrijven:

$$\Big| R_n \Big| < \frac{\mu \, \varrho^{n+1}}{1 - r\varrho} \Big| z \Big|^{n+1}$$

Zoo hebben we dan te onderzoeken de som:

Digitized by Google

$$x^{k_1+1}\int_C A_0 z^{k_1} e^{zx}\,dx + \cdots + x^{k_1+1}\int_C A_n z^{k_1+n} e^{zx}\,dz + x^{k_1+1}\int_C R_n z^{k_1} e^{zx}\,dz \,.\,. \quad (14)$$

Door $zx = -y$ te stellen gaat de laatste integraal over in:

$$\int_K R_n y^{k_1} e^{-y}\,dy$$

waar K een lus is in 't vlak van de variabele y, uitgaande van 't punt rx en er in terugkeerend, na om de oorsprong gegaan te zijn. De modulus is dus, op een getalfactor na, die onafhankelijk is van k_1 kleiner dan de modulus van

$$\frac{\mu\,(r\,\varrho)^{n+1}}{1 - r\,\varrho}$$

Omdat verondersteld kan worden dat

$$r\,\varrho < 1$$

is, kan men dus n groot genoeg kiezen, opdat de rest van de som (14) kleiner is, dan welk getal men ook wil, onverschillig welke waarde x heeft.

De moduli van de eerste termen gaan over in die van:

$$\int_K A_0 y^{k_1} e^{-y}\,dy;\ \frac{1}{x}\int_K A_1 y^{k_1+1} e^{-y}\,dy;\ \frac{1}{x^2}\int_K A_2 y^{k_1+2} e^{-y}\,dy;\ \text{enz.}$$

't Aantal is eindig; elk is zeer klein (want $\frac{y}{x}$ is zoo klein men wil $= z = r$) behalve de eerste, zoodat de limiet der som gelijk te stellen is aan de limiet van de eerste term, welke niet nul is. Dus heeft 't product van de integraal met x^{k_1+1} (behalve in 't uitgesloten geval van $k_1 =$ pos. geheel of nul) voor $x = \infty$ een eindige limiet, die van nul verschilt.

Geven we α_1 echter en willekeurige waarde en nemen we μ óok weer aan, dan krijgen we de integraal:

$$y_1 = \int e^{\mu z}(z - \alpha_1)^{k_1}(z - \alpha_2)^{k_2} \ldots . (z - \alpha_m)^{k_m} e^{zx}\,dz$$

genomen langs de lus, die met α_1 overeenstemt.

Digitized by Google

Om tot $\alpha_1 = 0$ teruggebracht te worden, moet z dan vervangen worden door $z + \alpha_1$ en daarna moet 't zooeven gevonden resultaat toegepast worden op:

$$y_1 \cdot e^{- \;{}_1x}$$

Zoo is dus gevonden:

$$\lim_{x = \infty} \left[y_1 \, e^{-\alpha_1 x} \, . \, x^{k_1+1} \right] \neq 0 \text{ en} < \infty$$

als y_1 de integraal is, die overeenstemt met α_1

7. Uit het voorgaande is nu een asymptotische voorstelling af te leiden voor

$$y_1 \, e^{-\alpha_1 x} \, x^{k_1+1} \quad {}^{1)}$$

Schrijven we n.l.:

$$y_1 \, e^{-\alpha_1 x} \, x^{k_1+1} = x^{k_1+1} \int_L A_0 \, z^{k_1} \, e^{zx} \, dz + \dots .$$

$$+ \, x^{k_1+1} \int_L A_n \, z^{k_1+n} \, e^{zx} \, dz + x^{k_1+1} \int_L R_n \, z^{k_1} \, e^{zx} \, dz \quad \dots \dots \quad (15)$$

waar de integralen genomen worden langs de lus, die de uiteinden in 't ∞ heeft in de vroeger aangewezen richting en die om $z = 0$ gaat, dan zien we, dat elke integraal uit twee rechte stukken en éen cirkelvormig bestaat. Van de rechte stukken weten we, dat 't product van de integraal met een willekeurige macht van x tot 0 nadert als x onbepaald toeneemt. We hebben dus slechts te beschouwen:

$$x^{k_1+1} \int_C A_0 \, z^{k_1} \, e^{zx} \, dz + \cdots + x^{k_1+1} \int_C A_n \, z^{k_1+n} \, e^{zx} \, dz +$$

$$+ \, x^{k_1+1} \int_C R_n \, z^{k_1} \, e^{zx} \, dz$$

Nu is:

---

1) POINCARÉ. Acta mathematica 8.
PICARD. Traité d'Analyse III.

Digitized by Google

$$x^{k_1+1}\int_C A_l\, z^{k_1+l}\, e^{zx}\, dz = \frac{A_l}{x^l}\left[\int_{rx}^{o} y^{k_1+l}\, e^{-y}\, dy + \right.$$

$$\left. + e^{2\pi i k_1}\int_o^{rx} y^{k_1+l}\, e^{-y}\, dy\right] =$$

$$= \frac{A_l}{x^l}\,(e^{2\pi i k_1} - 1)\int_o^{rx} y^{k_1+l}\, e^{-y}\, dy =$$

$$= \frac{A_l}{x^l}\,(e^{2\pi i k_1} - 1)\left[\Gamma(k_1 + l + 1) - \int_{rx}^{\infty} y^{k_1+l}\, e^{-y}\, dy\right]$$

Verder is:

$$\lim_{x=\infty}\left[x^{\gamma}\int_{rx}^{\infty} y^{k_1+l}\, e^{-y}\, dy\right] = 0. \quad (\gamma \text{ willekeurig})$$

en ook de limiet van 't product van de laatste term van de reeks van (15) met een willekeurige macht van x is nul, als x onbepaald toeneemt, want:

$$\left| x^{k_1+n+1}\int_C R_n\, z^{k_1}\, e^{zx}\, dz\right| < \left| \frac{1}{x}\, \frac{\mu\, \varrho^{n-1}}{1 - r\varrho}\right|$$

op een getalfactor na.

Schrijven we:

$$y_1\, e^{-\alpha_1 x}\, .\, x^{k_1+1} =$$

$$\sum_{l=0}^{n}\left[\frac{A_l}{x^l}\,(e^{2\pi i k_1} - 1)\left\{\Gamma(k_1 + l + 1) - \int_{rx}^{\infty} y^{k_1+l}\, e^{-y}\, dy\right\} + \right.$$

$$\left. + x^{k_1+1}\int_C R_n\, z^{k_1}\, e^{zx}\, dz\right]$$

dan vinden we volgens 't bovenstaande:

$$\lim_{x=\infty} x^n\, y_1\, e^{\alpha_1 x}\, x^{k_1+1} =$$

$$= \lim_{x=\infty}\sum_{l=0}^{n} x^n \frac{A_l}{x^l}(e^{2\pi i k_1} - 1)\left[\Gamma(k_1+l+1) - \int_{rx}^{\infty} y^{k_1+l}\, e^{-\eta}\, d\eta\right] +$$

$$+ \lim_{x=\infty} x^{k_1+n+1}\int_C R_n\, z^{k_1}\, e^{zx}\, dz =$$

$$= \sum_{l=0}^{n} x^n\, \frac{A_l}{x^l}\,(e^{2\pi i k_1} - 1)\,\Gamma(k_1 + l + 1) + \lim_{x=\infty} \varepsilon$$

Digitized by Google

Zoodat:

$$\lim_{x=\infty}\left[y_1 e^{-\alpha_1 x}\, x^{k_1+1} - \sum_{k=0}^{n}\frac{A_l}{x^l}(e^{2\pi i k_1}-1)\Gamma(k_1+l+1)\right]x^n = \lim_{x=\infty}\varepsilon$$

waar ε een waarde is, die voor $x=\infty$ verdwijnt.

Dus is:

$$y_1 e^{-\alpha_1 x}\, x^{k_1+1} \backsim (e^{2k_1\pi i}-1)\left[A_0\Gamma(k_1+1)+\frac{A_1\Gamma(k_1+2)}{x}+\ldots\frac{A_n\Gamma(k_1+n+1)}{x^n}\right]$$

een asymptotische voorstelling.

We kunnen dus schrijven:

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}\, x^{-k_1-1}(e^{2k_1\pi i}-1)\Gamma(k_1+1)\left[A_0+\frac{A_1(k_1+1)}{x}+\ldots\right.$$

$$\left.+\frac{A_n(k_1+1)(k_1+2)\ldots(k_1+n)}{x^n}+\frac{\varepsilon_0}{x^n}\right]$$

waar $\lim_{x=\infty}\varepsilon_0 = 0$

't welk ook in den vorm te brengen is:

$$y_1 = e^{\alpha_1 x}\, x^{-k_1-1}\left\{P_0+\frac{P_1}{x}+\frac{P_2}{x^2}+\ldots+\frac{P_n}{x^n}+\frac{\varepsilon'_0}{x^n}\right\}$$

of:

$$y_1 \backsim e^{\alpha_1 x}\, x^{-k_1-1}\left\{P_0+\frac{P_1}{x}+\frac{P_2}{x^2}+\ldots+\frac{P_n}{x^n}\right\}$$

Onderzoekt men op gelijke wijze de uitdrukking:

$$\frac{dy_1}{dx}=\int_L z\,v\,(z)\,e^{zx}\,dz$$

dan vindt men:

$$\frac{dy_1}{dx}=e^{\alpha_1 x}\, x^{-k_1-1}\left\{R_0+\frac{R_1}{x}+\ldots+\frac{R_n}{x^n}+\frac{\varepsilon_1}{x^n}\right\}$$

waar $\lim_{x=\infty}.\ \varepsilon_1 = 0.$

Digitized by Google

De termen, met uitzondering van die, welke ϵ_1 bevat, komen voort uit de differentiatie der gevonden reeks van y_1 (overeenkomende met 't geen in Hoofdstuk III gezegd is.)

Ten slotte wordt gevonden:

$$\frac{d^m y_1}{dx^m} = e^{\alpha_1 x}\, x^{-k_1-1} \left\{ T_0 + \frac{T_1}{x} + \frac{T_2}{k^2} + \ldots + \frac{T_n}{k^n} + \frac{\epsilon_m}{x^n} \right\}$$

waar $\lim\limits_{x=\infty} \epsilon_m = 0.$

8. Substitueert men nu deze waarden voor:

$$y_1 \;;\; \frac{dy_1}{dx} \;;\; \frac{d^2 y_1}{dx^2} \;;\ldots;\; \frac{d^m y_1}{dx^m} \;;$$

in de gegeven differentiaalvergelijking, dan stelt men de coëfficienten van de opvolgende machten van $\frac{1}{x}$ alle nul, omdat n een getal is, dat zoo groot genomen kan worden als men wil. Hierdoor worden dan de coëfficienten P gevonden.

Door (9) worden m waarden voor α gevonden en met elk dezer waarden komt eene ontwikkeling van de hier gevonden vorm overeen.

De uitdrukking, zooeven voor y_1 gevonden, valt dus samen met een dier ontwikkelingen, welke in 't algemeen divergent zijn.

Hierdoor krijgen wij de stelling van Poincaré:

De m divergente ontwikkelingen van den vorm:

$$e^{\alpha x} \,.\, x^{-k-1} \left(P_0 + \frac{P_1}{x} + \frac{P_2}{x^2} + \ldots \right)$$

zijn de asymptotische voorstellingen van m integralen, van de differentiaal vergelijking, wanneer x positief blijft en onbepaald toeneemt. [1])

---

[1]) Poincaré. Acta Math. 8.

Digitized by Google

9. Dit theorema van POINCARÉ blijft onveranderd, wanneer men, inplaats van te veronderstellen, dat alle coëfficienten van de vergelijking

$$p_o \frac{d^m y}{dx^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \cdots + p_m y = 0.$$

van den eersten graad zijn, aanneemt, dat ze van willekeurigen graad zijn. We zullen dit niet uitvoerig nagaan, maar willen liever deze algemeene stelling toepassen op de Besselsche differentiaal vergelijking:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0.$$

Stel nu:

$$y = e^{\alpha x} . u$$

dan komt er bij substitutie:

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \left(2\alpha + \frac{1}{x}\right) \frac{dy}{dx} + \left(\alpha^2 + 1 + \frac{\alpha}{x} + \frac{\nu^2}{x^2}\right) u = 0.$$

Stel:

$$\alpha^2 + 1 = 0 \text{ dus } \alpha = \pm i$$

en verder:

$$u = x^\varrho \left(A_o + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots\right)$$

dan wordt gevonden:

$$2\varrho + 1 = 0 \text{ of } \varrho = -\frac{1}{2}$$

$$(\varrho^2 - \nu^2) A_o + (2\varrho - 1) \alpha A_1 = 0$$

$$\{(\varrho - 1)^2 - \nu^2\} A_1 + (2\varrho - 3) \alpha A_2 = 0$$

$$\{(\varrho - 2)^2 - \nu^2\} A_2 + (2\varrho - 5) \alpha A_3 = 0$$

. . . .

waaruit:

Digitized by Google

$$A_1 = -\frac{\varrho^2 - \nu^2}{(2\varrho - 1)\,\alpha} \cdot A_0 = -\frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2\alpha} \cdot A_0$$

$$A_2 = -\frac{(\varrho - 1)^2 - \nu^2}{(2\varrho - 3)\,\alpha} A_1 = -\frac{\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)}{4\alpha} A_1 = \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)}{2\ .\ 4.\ \alpha^2} A_0$$

$$A_3 = -\frac{(\varrho - 2)^2 - \nu^2}{(2\varrho - 5)\,\alpha} A_2 = -\frac{\left(\nu^2 - \frac{25}{4}\right)}{6\alpha} A_2 = -\frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)\left(\nu^2 - \frac{25}{4}\right)}{2\ .\ 4\ .\ 6\ \alpha^3} A_0$$

enz.

Deze substitueerend komt er:

$$y = A_0\, e^{\alpha x}\, x^{-1/2} \left[1 - \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{2\alpha} \cdot \frac{1}{x} + \frac{\left(\nu^2 - \frac{1}{4}\left(\nu^2 - \frac{9}{4}\right)\right.}{2.\ 4.\ \alpha^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \ldots \right]$$

Stelt men hierin $\alpha = i$ en $\alpha = -i$, dan komen er twee reeksontwikkelingen:

$$y_1 = A_0\, e^{ix} \,.\, x^{-1/2} \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4} \cdot \frac{1}{2ix} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{4.\ 4} \cdot \frac{1}{2!}\, \frac{1}{(2ix)^2} - \ldots \right]$$

$$y_2 = B_0 e^{-ix} x^{-1/2} \left[1 - \frac{4\nu^2 - 1}{4} \cdot \frac{1}{(-2ix)} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{4.\ 4} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{(-2ix)^2} - \ldots \right]$$

Volgens Poincaré zijn deze beide ontwikkelingen asymptotische voorstellingen van de integralen van de Besselsche vergelijking. Om hieruit de asymptotische ontwikkelingen der integralen $I_\nu\,(x)$ en $Y_\nu\,(x)$ te vinden, heeft men dus slechts lineaire functies van y_1 en y_2 te nemen en de constanten behoorlijk te bepalen.

We nemen dus:

$$I_\nu\,(x) = A\, y_1 + B y_2$$

Om A en B te bepalen maken we gebruik van:

$$I_{\nu - 1/2}\,(x) = (-x)^\nu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{1}{x} \cdot \frac{d}{dx} \right)^\nu \cos x$$

Digitized by Google

waaruit:

$$I_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \sin x$$

$$I_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{\sin x}{x} - \cos. x\right)$$

$$I_{5/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2} \left(\frac{3-x^2}{x^2} \sin x - \frac{3 \cos x}{x}\right)$$

enz.

Stellen we nu: $\nu = \frac{1}{2}$; $\frac{3}{2}$; $\frac{5}{2}$; enz. in y_1 en y_2

dan komt er:

$$y_{1,1/2} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}} \quad ; \quad y_{2,1/2} = \frac{e^{-ix}}{x^{1/2}} ;$$

$$y_{1,3/2} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}}\left(1 - \frac{1}{ix}\right) \quad ; \quad y_{2,3/2} = \frac{e^{-ix}}{x^{1/2}}\left(1 + \frac{1}{ix}\right) ;$$

$$y_{1,5/2} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}}\left(1 - \frac{3}{ix} - \frac{3}{x^2}\right) ; \; y_{2,5/2} = \frac{e^{-ix}}{x^{1/2}}\left(1 + \frac{3}{ix} - \frac{3}{x^2}\right) ;$$

Uit:

$$I_{1/2}(x) = Ay_{1,1/2} + By_{2,1/2}$$

volgt:

$$A = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \text{ en } B = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}}$$

Uit:

$$I_{3/2}(x) = Ay_{1,3/2} + By_{2,3/2}$$

volgt:

$$A = -\frac{i}{i\sqrt{2\pi}} \quad \text{en} \quad B = -\frac{i}{i\sqrt{2\pi}}$$

Uit:

$$I_{5/2}(x) = Ay_{1,5/2} + By_{2,5/2}$$

Digitized by Google

volgt:

$$A = -\frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \quad \text{en} \quad B = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}}$$

zoodat in 't algemeen uit:

$$I_\nu(x) = Ay_1 + By_2 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (16)$$

volgt:

$$A = \frac{e^{-\frac{2\nu-1}{4}\pi i}}{i\sqrt{2\pi}} \quad \text{en} \quad B = -\frac{e^{\frac{2\nu-1}{4}\pi i}}{i\sqrt{2\pi}}$$

of:

$$I_\nu(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{-\frac{2\nu-1}{4}\pi i} y_1 - e^{\frac{2\nu-1}{4}\pi i} y_2 \right\}$$

We hadden de vrije beschikking over de waarden van A en B, die willekeurig genomen kunnen worden; we hebben nu die waarden gekozen, welke de hier voorgestelde uitdrukking voor I_ν in overeenstemming brengen met de uitdrukking voor I_ν, die op andere wijze gevonden wordt.

Schrijf y_1 en y_2 als:

$$y_1 = e^{ix} x^{-1/2} \left\{ 1 - \frac{4\nu^2-1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{x} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^3} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{8i} \cdot \frac{1}{x^3} + \ldots \right\}$$

$$y_2 = e^{-ix} x^{-1/2} \left\{ 1 + \frac{4\nu^2-1}{4} \cdot \frac{1}{2i} \cdot \frac{1}{x} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{x^2} - \right.$$
$$\left. - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^3} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{8i} \cdot \frac{1}{x^3} + \ldots \ldots \right\}$$

Stel:
$$x - \frac{2\nu-1}{4}\pi = t \; ;$$

we zien dan:

Digitized by Google

$$I_\nu(x) = \frac{1}{i\sqrt{2\pi x}}\left[e^{it} - e^{-it} - \frac{4\nu^2-1}{4}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{x}(e^{it}+e^{-it}) - \right.$$

$$- \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x^2}(e^{it}-e^{-it}) +$$

$$\left. + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^3}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{8i}\cdot\frac{1}{x^3}(e^{it}+e^{-it}) + \ldots\right] =$$

$$= \frac{1}{i\sqrt{2\pi x}}(e^{it}-e^{-it})\left\{1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots\right\} -$$

$$- \frac{1}{i\sqrt{2\pi x}}(e^{it}-e^{-it})\,\frac{4\nu^2-1}{4}\cdot\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{x}\left\{1 - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{x^2} + \ldots\right\} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi x}}\sin t\left\{1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \ldots\right\} +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}\,\frac{4\nu^2-1}{4x}\cos t\left\{1 - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \ldots\right\}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2}\cdot\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \ldots\right\}\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) +$$

$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\frac{4\nu^2-1}{8x}\left\{\frac{1}{1!} - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2}\cdot\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \ldots\right\}\cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right).$$

Hier vinden we dus weder:

$$I_\nu(x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{P_n \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_n \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)\right\}$$

evenals in Hoofdstuk III, 23.

Voor oneindige waarde van 't argument werd vroeger reeds gevonden:

$$I_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$$

dit is de eerste term van de zooeven gevonden ontwikkeling voor $\lim x = \infty$ d. i. voor zeer groote waarden van x.

10. Om $I_{-\nu}(x)$ te ontwikkelen gebruiken we:

$$I_{-\nu+1/2}(x) = (-1)^\nu\, x^{-\nu-\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\right)^{-\nu}\sin x\,.$$

Digitized by Google

waaruit voor $\nu = 1, 2, 3$ enz. volgen:

$$I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$$

$$I_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{-3/2} (x \sin x + \cos x)$$

$$= -\sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \left(\sin x + \frac{\cos x}{x}\right)$$

$$I_{-5/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left(\frac{3 \sin x}{x} + \frac{3 - x^2}{x^2} \cos x\right)$$

enz.

Stel nu: $\nu = -1/2\,;\ -3/2\,;\ -5/2$ in y_1 en y_2 dan komt er:

$$y_{1,-1/2} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}} \quad ; \quad y_{2,-1/2} = \frac{e^{-ix}}{x^{1/2}}$$

$$y_{1,-3/2} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}} \left(1 - \frac{1}{ix}\right) \quad ; \quad y_{2,-3/2} = \frac{e^{-ix}}{x^{1/2}} \left(1 + \frac{1}{ix}\right)$$

$$y_{1,-5/2} = \frac{e^{ix}}{x^{1/2}} \left(1 - \frac{3}{ix} - \frac{3}{x^2}\right); \quad y_{2,-5/2} = \frac{e^{-ix}}{x^{1/2}} \left(1 + \frac{3}{ix} - \frac{3}{x^2}\right)$$

Uit: $\quad I_{-1/2}(x) = A y_{1,-1/2} + B y_{2,-1/2}$

volgt: $\quad A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $B = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Uit: $\quad I_{-3/2}(x) = A y_{1,-3/2} + B y_{2,-3/2}$

volgt: $\quad A = i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $B = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Uit: $\quad I_{-5/2}(x) = A y_{1,-5/2} + B y_{2,-5/2}$

volgt: $\quad A = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $B = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

Uit: $\quad I_{-7/2}(x) = A y_{1,-7/2} + B y_{2,-7/2}$

volgt: $\quad A = -i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ en $B = i\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$

In 't algemeen zal uit:

Digitized by Google

$$I_{-\nu}(x) = A_1 y_1 + B_1 y_2$$

volgen:

$$A_1 = \frac{e^{\frac{2\nu-1}{4}\pi i}}{\sqrt{2\pi}} \quad \text{en} \quad B_1 = \frac{e^{-\frac{2\nu-1}{4}\pi i}}{\sqrt{2\pi}} \quad \ldots\ldots \quad (17)$$

of: $$I_{-\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ e^{\frac{2\nu-1}{4}\pi i} y_1 + e^{-\frac{2\nu-1}{4}\pi i} y_2 \right\}$$

waaruit gevonden wordt:

$$I_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots \right\} \cos\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi \right) -$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{4\nu^2-1}{8x} \left\{ \frac{1}{1!} - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots \right\} \sin\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi \right)$$

11. Als ν geheel is vinden we:

$$I_{-\nu}(x) = (-1)^\nu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2} \cdot \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots \right\} \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi \right) +$$
$$-(-1)^\nu \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cdot \frac{4\nu^2-1}{8x} \left\{ \frac{1}{1!} \cdot - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots \right\} \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi \right)$$

Hieruit vinden we óok, dat voor geheele waarden van ν:

$$I_\nu(x) = (-1)^\nu I_{-\nu}(x)$$

Voor $\nu = 0$ zijn $I_\nu(x)$ en $I_{-\nu}(x)$ gelijk. [1])

---

[1]) Door ν te veranderen in $-\nu$ blijft de differentiaalvergelijking onveranderd; dan is er nog een oplossing n.l.:

$$I_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2} \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x^2} + \ldots \right\} \sin\left(x + \frac{2\nu+1}{4}\pi \right) +$$
$$+ \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{4\nu^2-1}{8x} \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2} \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^2 x^2} + \ldots \right\} \cos\left(x + \frac{2\nu+1}{4}\pi \right)$$

of: $$I_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2} \frac{1}{2!} \cdot \frac{1}{2^2 x^2} + \ldots \right\} \cos\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi \right) -$$
$$- \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \frac{4\nu^2-1}{8x} \left\{ 1 - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2} \cdot \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{2^2 x^2} + \ldots \right\} \sin\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi \right)$$

Dit is dezelfde als de zooeven gevondene.

Digitized by Google

12. Stel $e^{-\frac{2\nu-1}{4}\pi i} = \alpha$

dan is in (16) en (17):

$$A = \frac{\alpha}{i\sqrt{2\pi}} \;;\; B = -\frac{1}{\alpha i\sqrt{2\pi}} \;;\; A_1 = \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} \;;\; B_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{2\pi}}$$

De gevonden particuliere oplossingen y_1 en y_2 komen overeen met die, welke uit $I_\nu(x)$ en $I_{-\nu}(x)$ afgeleid worden op de volgende wijze:

Zijn:

$$y_1 = A' I_\nu(x) + B' I_{-\nu}(x)$$

$$y_2 = A'_1 I_\nu(x) + B'_1 I_{-\nu}(x)$$

dan vinden we, omdat we:

$$I_\nu(x) = Ay_1 + By_2$$

en $$I_{-\nu}(x) = A_1 y_1 + B_1 y_2$$

hebben aangenomen, dat:

$$A' = \frac{\alpha^3 i\sqrt{2\pi}}{1+\alpha^4} \;;\; A'_1 = -\frac{\alpha i\sqrt{2\pi}}{1+\alpha^4}$$

$$B' = \frac{\alpha\sqrt{2\pi}}{1+\alpha^4} \;;\; B'_1 = \frac{\alpha^3\sqrt{2\pi}}{1+\alpha^4}$$

genomen moeten worden, om de gevonden particuliere oplossingen y_1 en y_2 te verkrijgen uit de bekende functies $I_\nu(x)$ en $I_{-\nu}(x)$.

13. Bewezen is: [1])

$$\frac{d\,I_\nu(x)}{dx} = \frac{2}{x}\left\{\frac{1}{2}\nu I_\nu(x) - (\nu+2)I_{\nu+2}(x) + (\nu+4)I_{\nu+4}(x) - \ldots\right\}$$

't Tweede lid kan volgens de stellingen uit Hoofdstuk III asymptotisch ontwikkeld worden, zoodat $I_\nu(x)$ een functie

[1]) Forsyth. Differential equations, p. 161.

Digitized by Google

is, die, asymptotisch voorgesteld, gedifferentieerd mag worden.

14. Uitgaande van:

$$Y_{\nu+\frac{1}{2}}(x) = (-1)^{\nu-1} I_{-\nu-\frac{1}{2}}(x)$$

vinden we op geheel analoge wijze:

$$Y_\nu(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2}\cdot\frac{1}{2\,!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \cdots\right\} \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) +$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\frac{4\nu^2-1}{8x}\left\{\frac{1}{1\,!} - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2}\cdot\frac{1}{3\,!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \cdots\right\} \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$$

Eveneens vinden we:

$$Y_{-\nu}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left\{1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{4^2}\cdot\frac{1}{2\,!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \cdots\right\} \sin\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) +$$
$$+\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot\frac{4\nu^2-1}{8x}\left\{\frac{1}{1\,!} - \frac{(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{4^2}\cdot\frac{1}{3\,!}\cdot\frac{1}{2^2x^2} + \cdots\right\} \cos\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right)$$

15. Door in de bekende betrekking:

$$Y_\nu = \frac{1}{\sin \nu\pi}\{\cos \nu\pi\, I_\nu - I_{-\nu}\}$$

te substitueeren:

$$I_\nu = p \sin \alpha + q \cos \alpha$$

en $$I_{-\nu} = p \sin(\alpha + \nu\pi) + q \cos(\alpha + \nu\pi)$$

waarin: $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot P_\nu = p$ en $\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cdot Q_n = q$

en $x - \frac{2\nu-1}{4}\pi = \alpha$ gesteld zijn, komt er:

$$Y_\nu \sim \frac{1}{\sin \nu\pi}[\cos\nu\pi(p\sin\alpha + q\cos\alpha) - p(\sin\alpha\cos\nu\pi + \cos\alpha\sin\nu\pi)$$
$$- q(\cos\alpha\cos\nu\pi - \sin\alpha\sin\nu\pi)]$$
$$= -p\cos\alpha + q\sin\alpha$$

Digitized by Google

of

$$Y_\nu = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ -P_n \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_n \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}$$

Door in:

$$Y_{-\nu} = \sin \nu\pi \, I_\nu + \cos \nu\pi \, . \, Y_\nu (x)$$

evenzoo te handelen komt er:

$$Y_{-\nu} = \sin \nu\pi \, (p \sin \alpha + q \cos \alpha) + \cos \nu\pi \, (-p \cos \alpha + q \sin \alpha) =$$
$$= -p \cos (\alpha + \nu\pi) + q \sin (\alpha + \nu\pi) =$$
$$= -p \cos \left[x + \frac{2\nu-1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right] + q \sin \left[x + \frac{2\nu-1}{4}\pi + \frac{1}{2}\pi\right] =$$
$$= p \sin \left\{ x + \frac{2\nu-1}{4}\pi \right\} + q \cos \left\{ x + \frac{2\nu-1}{4}\pi \right\}$$

of:

$$Y_{-\nu} \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_n \sin\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_n \cos\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}$$

16. Resumeerende krijgen we dus:

$$I_\nu (x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_n \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \pm Q_n \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}$$

$$I_\nu (x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_n \cos\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) - Q_n \sin\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}$$

$$Y_\nu (x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ -P_n \cos\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_n \sin\left(x - \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}$$

$$Y_{-\nu} (x) \backsim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left\{ P_n \sin\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) + Q_n \cos\left(x + \frac{2\nu-1}{4}\pi\right) \right\}.$$

17. Nemen we verder nog als voorbeeld de differentiaalvergelijking:

$$x^3 \frac{d^3y}{dx^3} + (bx^2 + ax^3) \frac{d^2y}{dx^2} + (cx^2 + fx) \frac{dy}{dx} + (kx^3 + gx + h) y = 0$$

of:

Digitized by Google

$$\frac{d^3y}{dx^3}+\left(a+\frac{b}{x}\right)\frac{d^2y}{dx^2}+\left(\frac{c}{x}+\frac{f}{x^2}\right)\frac{dy}{dx}+\left(k+\frac{g}{x^2}+\frac{h}{x^3}\right)y=0$$

Door hierin $y=e^{\lambda x}.u$ te stellen, krijgen we een derdemachts vergelijking op te lossen ter bepaling van drie waarden voor λ.

Kiezen we nu $a=-\frac{7}{3}$ en $k=\frac{1}{6}$

dan vinden we:

$$\frac{d^3u}{dx^3}+\frac{d^2u}{dx^2}\left(3\lambda-\frac{7}{6}+\frac{b}{x}\right)+\frac{du}{dx}\left(3\lambda^2-\frac{7}{3}\lambda+2\lambda\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{f}{x^2}\right)+$$
$$+u\left(\lambda^3-\frac{7}{6}\lambda^2+\lambda^2\frac{b}{x}+\lambda\frac{c}{x}+\lambda\frac{f}{x^2}+\frac{1}{6}+\frac{g}{x^2}+\frac{h}{x^3}\right)=0.$$

Nu stellen we:

$$\lambda^3-\frac{7}{6}\lambda^2+\frac{1}{6}=0 \quad \ldots\ldots\ldots \quad (18)$$

waaruit volgt:

$$\lambda_1=1 \quad ; \quad \lambda_2=\frac{1}{2} \quad ; \quad \lambda_3=-\frac{1}{3}.$$

De vergelijking gaat dan over in:

$$\frac{d^3u}{dx^3}+\left(3\lambda-\frac{7}{6}+\frac{b}{x}\right)\frac{d^2u}{dx^2}+\left(3\lambda^2-\frac{7}{3}\lambda+2\lambda\frac{b}{x}+\frac{c}{x}+\frac{f}{x^2}\right)\frac{du}{dx}+$$
$$+\left(\lambda^2\frac{b}{x}+\lambda\frac{c}{x}+\lambda\frac{f}{x^2}+\frac{g}{x^2}+\frac{h}{x^3}\right)u=0.$$

Stellen we nu:

$$u=x^{\varrho}\left(A_o+\frac{A_1}{x}+\frac{A_2}{x^2}+\ldots\right)$$

dan krijgen we ter bepaling van ϱ en van de coëfficienten A:

$$\lambda b+c+\left(3\lambda-\frac{7}{3}\right)\varrho=0$$

$$A_o\left|\left(3\lambda-\frac{7}{6}\right)\varrho(\varrho-1)+(2\lambda b+c)\varrho+\lambda f+g\right|+A_1\left|\left(3\lambda-\frac{7}{3}\right)(\varrho-1)+\lambda b+c\right|\lambda=0$$

Digitized by Google

$$A_o\{\varrho(\varrho-1)(\varrho-2)+b\varrho(\varrho-1)+f\varrho+h\}+A_1\left\{\left(3\lambda-\frac{7}{6}\right)(\varrho-1)(\varrho-2)+(2\lambda b+c)(\varrho-1)+\lambda f+g\right\}+$$
$$+A_2\left\{\left(3\lambda-\frac{7}{3}\right)(\varrho-2)+\lambda b+c\right\}\lambda=0$$

$$A_1\{(\varrho-1)(\varrho-2)(\varrho-3)+b(\varrho-1)(\varrho-2)+f(\varrho-1)+h\}+$$
$$+A_2\left\{\left(3\lambda-\frac{7}{6}\right)(\varrho-2)(\varrho-3)+(2\lambda b+c)(\varrho-2)+\lambda f+g\right\}+$$
$$+A_3\left\{\left(3\lambda-\frac{7}{3}\right)(\varrho-3)+\lambda b+c\right\}\lambda=0$$

$$A_2\{(\varrho-2)(\varrho-3)(\varrho-4)+b(\varrho-2)(\varrho-3)+f(\varrho-2)+h\}+$$
$$+A_3\left\{\left(3\lambda-\frac{7}{6}\right)(\varrho-3)(\varrho-4)+(2\lambda b+c)(\varrho-3)+\lambda f+g\right\}+$$
$$+A_4\left\{\left(3\lambda-\frac{7}{3}\right)(\varrho-4)+\lambda b+c\right\}\lambda=0.$$

De recurrente betrekking tusschen drie opeenvolgende coëfficienten is hierdoor bekend.

Uit de eerste dezer vergelijkingen vinden we:

$$\varrho=\frac{\lambda b+c}{\frac{7}{3}-3\lambda}$$

A_o is arbitrair. We krijgen dus drie particuliere integralen; is elk met een arbitraire constante vermenigvuldigd, dan vinden we door optelling de algemeene integraal.

Digitized by Google

HOOFDSTUK VI.

VERVOLG.

---

1. In de hoofdstukken III en V is een kort overzicht van de methode van POINCARÉ gegeven; daarbij is vooral gelet op het toepassen in de praktijk.

Latere schrijvers zooals KNESER, HORN, JACOBSTHAL en WEBER hebben differentiaalvergelijkingen van de eerste en tweede orde onderzocht.

De methoden van de drie eerstgenoemden zullen we in 't kort vermelden, zooveel mogelijk echter weder het oog houdend op de praktische toepassingen.

I. METHODE VAN KNESER.

2. KNESER onderzocht de reëele integralen van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_2 \, u = 0 \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \quad (1)$$

waar:

$$p_1 = a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x_2} + \cdots$$

$$p_2 = b_0 + \frac{b_1}{x} + \frac{b_2}{x_2} + \cdots$$

asymptotische ontwikkelingen met reëele coëfficienten zijn:

Digitized by Google

De gezochte integralen kunnen allen door asymptotische reeksen voorgesteld worden [1]).

3. Aan het eigenlijk onderzoek gaat een algemeene beschouwing vooraf over differentiaalvergelijkingen van den vorm:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y)$$

waar f, binnen een zeker interval $a < x < b$, voor willekeurige waarden van y eindig en continu is en steeds 't zelfde teeken heeft als y.

Verder geldt de voorwaarde, dat een reëele continue integraal van de vergelijking voor het geheele gebied binnen 't interval ondubbelzinnig bepaald is door voorgeschreven waarden van y en $\frac{dy}{dx}$.

Nu worden de volgende resultaten gevonden:

1°. Van de functies y en $\frac{dy}{dx}$ kan er binnen het interval niet meer dan één nul worden en deze niet meer dan één maal.

2°. Wordt verder nog geëischt, dat f tegelijk met y toe- of afneemt, als x een bepaalden weg doorloopt, terwijl 't interval zich aan den positieven kant tot in 't oneindige uitstrekt, dan bezit de vergelijking twee soorten integralen, maar ook niet meer dan twee.

De eerste soort omvat die integralen, welke steeds aangroeiend of afnemend $\pm \infty$ tot grens hebben. De verhouding van twee zulke integralen heeft de eenheid tot limiet.

Tot de tweede soort behooren die integralen, waarbij y en

[1]) Untersuchungen und asymptotische Darstellung der Integrale gewisser Diff. gl. bei grossen reellen Werthe des Arguments. Crelle's Journal (1896 - 99). Bd. 116—117—120.

Digitized by Google

$\frac{dy}{dx}$ tot nul naderen, terwijl de een steeds aangroeit, de ander steeds afneemt. Twee integralen van de tweede soort zijn identiek, zoodra ze in één punt van 't interval gelijk zijn.

4. Onder de beschouwde vergelijkingen ressorteert:

$$\frac{d^2 y}{dx} = y\,(a^2 + \varphi\,(x))\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2)$$

waarin

$$\lim_{x=\infty} \varphi = 0$$

en a^2 een positief getal is, terwijl bovendien wordt aangenomen dat:

$$\int_{x_0}^{x} \varphi\,(x)\,dx = \text{eindig is.}$$

De integralen van (2) zijn tot de twee zooeven vermelde groepen te brengen, n.l.:

$$y_1 = B_1\,e^{ax}\,(1 + \varepsilon_1)\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3^a)$$

die steeds aangroeien en voor $x = \infty$ tot 't oneindige naderen en

$$y_2 = B_2\,e^{-ax}\,(1 + \varepsilon_2)\,\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3^b)$$

waarbij y_2 en $\frac{dy_2}{dx}$ tot nul naderen, terwijl de een steeds aangroeit en de ander steeds afneemt.

De coëfficienten B_1 en B_2 zijn constanten; voor $x = \infty$ gelden:

$$\lim \varepsilon_1 = \lim \varepsilon_2 = \lim \varepsilon'_1 = \lim \varepsilon'_2 = 0.$$

5. Vergelijking (2) wordt uit (1) afgeleid, door in deze te substitueeren:

$$u = y\,e^{-\frac{1}{2}\int p_1\,dx}.$$

In de daardoor verkregen vergelijking:

Digitized by Google

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(c_o + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots\right) y = 0$$

is de coëfficient van y een asymptotische reeks, als de coëfficienten van (1) asymptotische reeksen zijn (volgens de stellingen van Hfdst. III.)

De vorm (2) wordt nu verkregen door:

$$c_o = b_o - \frac{1}{4} a_o{}^2 = - a^2$$

te stellen, terwijl verder voldaan moet worden aan de eisch:

$$c_1 = b_1 - \frac{1}{2} a_o\, a_1 = 0.$$

6. De resultaten in art. 4 vermeld, vinden een gewichtige toepassing op de asymptotische voorstelling van de integraal van een lineaire differentiaalvergelijking door een divergente reeks, die formeel aan de vergelijking voldoet.

In 't bijzonder toont Kneser nu aan, dat elke integraal van de differentiaalvergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\left(- a^2 + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \ldots\right) = 0$$

waar de coëfficient van y een reëele machtreeks is, waarvan het convergentiegebied niet verdwijnt, asymptotisch kan worden voorgesteld door een reeks:

$$y \backsim \alpha_o + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots + \frac{\alpha_n}{x^n}\,.$$

7. Analoge onderzoekingen stelde Kneser in omtrent differentiaalvergelijkingen, wier reëele integralen oscillatorisch zijn d.w.z. integralen, die voor groote reëele waarden van 't argument oneindig veel malen verdwijnen. In 't bijzonder wordt de vergelijking:

Digitized by Google

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y\left(a+\frac{c_2}{x^2}+\frac{c_3}{x^3}+\ .\ .\ .\right)=0$$

onderzocht. Ook hier ontbreekt de term met $\frac{1}{x}$.

Nadat vooraf aangetoond is, dat alle integralen van deze vergelijking voor groote waarden van x voorgesteld kunnen worden door:

$$y=C_1\ cos\ ax+C_2\ sin\ ax+\varepsilon$$

waarin C_1 en C_2 constanten zijn en

$$\lim_{x=\infty}\varepsilon=\lim_{x=\infty}\varepsilon'=0$$

wordt de asymptotische voorstelling van deze integraal gegeven, n.l. als:

$$y\backsim cos\ ax.\left\{\alpha_0+\frac{\alpha_1}{x}+\ldots+\frac{\alpha_p}{x^p}\right\}+sin\ ax\left\{\beta_0+\frac{\beta_1}{x}+\ldots+\frac{\beta_p}{x^p}\right\}$$

waarin α_0 en β_0 willekeurige (C_1 en C_2 van de vorige uitdrukking) constanten zijn.

8. De Bessel'sche vergelijking:

$$x^2\frac{d^2u}{dx^2}+x\frac{du}{dx}+(x^2-\nu^2)u=0$$

wordt door de substitutie:

$$u=\frac{y}{\sqrt{x}}\qquad\text{en}\qquad\nu^2=\frac{1}{4}-b$$

herleid tot:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+(1+\frac{b}{x^2})y=0$$

Daardoor wordt als algemeene integraal gevonden:

$$y\sim(\alpha_0\ cos\ x+\beta_0\ sin\ x)\ P_n-(\alpha_0\ sin\ x-\beta_0\ cos\ x)\ Q_n$$

waaruit dus:

$$u\sim\frac{1}{\sqrt{x}}(\alpha_0\ cos\ x+\beta_0\ sin\ x)\ P_n-\frac{1}{\sqrt{x}}(\alpha_0\ sin\ x-\beta_0\ cos\ x)\ Q_n$$

Digitized by Google

(die gemakkelijk te herleiden is tot den vorm, gevonden in Hoofdstuk III art. 25).

9. Ook voor 't geval, dat de bepaalde integraal:

$$\int_x^\infty \varphi(x)\,dx$$

niet eindig is, worden uitdrukkingen voor y afgeleid. Daardoor wordt dan de asymptotische voorstelling van de integralen van de vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = y\left(a^2 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \dots\right)$$

met reëele coëfficienten, voor reëele oneindig groote waarde van x, afgeleid.

Deze voorstelling is:

$$y = e^{ax}\, x^{\frac{c_1}{2a}} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \dots\right)$$

waarin α_0 willekeurig is. De coëfficienten α_1, α_2, enz. zijn zóo bepaald, dat de reeks formeel aan de vergelijking voldoet.

Voor negatieve waarden van a krijgen we dus integralen, die nul worden voor $x = \infty$; al deze integralen zijn dus alleen van elkaar onderscheiden door constante factoren n.l. α_0.

Is a positief, dan hebben we door dezelfde formule de asymptotische voorstelling van alle integralen, die oneindig worden voor $x = \infty$; de limiet hunner verhouding is in dit geval de eenheid.

10. De gevonden resultaten worden door Kneser ten slotte gegeneraliseerd voor de vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y\,f(x) = 0$$

waarin:

Digitized by Google

$$f(x) = a^2 + \frac{1}{x} \{c_1 + \varphi(x)\}$$

Kunnen nu een positieve echte breuk γ en twee positieve constante getallen g en g' gevonden worden, zóo dat voor $x > g$:

$$| x^\gamma \varphi'(x) | < g_1 \quad \text{en} \quad | \varphi(x) | < g_1$$

zijn en dat verder

$$\int_x^\infty \frac{| \varphi(x) |}{x} dx$$

een eindige grootheid is, terwijl de functies $\varphi(x)$ en $\varphi'(x)$ continu en a en c_1 reëele constanten zijn, dan is:

$$| x^{1+\gamma} f'(x) |$$

kleiner dan zekere vaste grens, zoodra $x > g$ is, terwijl dan ook de integralen van de vergelijking, evenals hunne afgeleiden voor groote waarden van x, tusschen eindige grenzen liggen.

Die integralen hebben dan den vorm:

$$y = C_1 \cos \left\{ \frac{c_1}{2a} \log x + ax \right\} + C_2 \sin \left\{ \frac{c_1}{2a} \log x + ax \right\} + \varepsilon$$

waar C_1 en C_2 constanten zijn, terwijl

$$\lim_{x=\infty} \varepsilon = \lim_{x=\infty} \frac{d\varepsilon}{dx} = 0$$

De algemeene reëele integraal van de vergelijking:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + y \left\{ a^2 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \ldots \right\} = 0$$

waarin de coëfficient van y, voor groote waarden van x convergent is en de constanten a en c reëel zijn, wordt dan voorgesteld door de reeksontwikkelingen:

$$R = \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots \right) \cos \left(\frac{c_1}{2a} \log x + ax \right) +$$
$$+ \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{x} + \frac{\beta_2}{x^2} + \ldots \right) \sin \left(\frac{c_1}{2a} \log x + ax \right)$$

Digitized by Google

α en β zijn reëele constanten, die te bepalen zijn; α_0 en β_0 zijn arbitrair.

11. De oorspronkelijke vergelijking:

$$\frac{d^2u}{dx^2} + p_1 \frac{du}{dx} + p_2 u = 0$$

heeft dus, voor 't geval dat

$$c_0 = b_0 - \frac{1}{4} a_0^2 < 0$$

is, integralen, die asymptotisch voorgesteld worden door:

$$e^{\frac{1}{2} a_0 + x \sqrt{-c_0}} \; x^{\frac{1}{2} a_1 + \frac{c_1}{2\sqrt{-c_0}}} \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{x} + \frac{\alpha_2}{x^2} + \ldots\right)$$

en wanneer:

$$c_0 > 0 \text{ is door:}$$

$$e^{\frac{1}{2} a_0 x} \, . \, x^{\frac{1}{2} a_1} \, . \, R.$$

II. Methode van Horn.

12. Vooreerst houdt Horn [1]) zich bezig met de vergelijking van de eerste orde:

$$x^{k+1} \frac{dy}{dx} = y \, f(x,y) \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, . \, (1)$$

waarin k een geheel positief getal voorstelt en f een convergente machtreeks voor kleine waarden van $|\,x\,|$ en $|\,y\,|$ voorstelt.

De integralen van deze vergelijking worden voorgesteld door reeksen, welker termen te bepalen zijn. Deze reeksen zijn, zooals aangetoond wordt, convergent voor voldoend kleine reëele positieve waarden van x, wanneer het reëele deel van f (0, 0) positief is.

---

[1]) Crelle's Journal Bd. 119 en vlg.

Digitized by Google

13. Vervolgens onderwerpt HORN de gevonden integraal-uitdrukkingen, die voldoen aan:

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx}+(a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots)\,y=b_0+b_1 x+b_2 x^2+\ldots \quad (2)$$

(waarin de machtreeksen voor voldoend kleine waarden van x convergeeren) aan een nader onderzoek en wel:

1⁰. met betrekking tot hun gedrag bij nadering van x tot het onbepaalde punt $x=0$

2⁰. ten opzichte van hun gedrag bij omloop om dit punt.

Eindelijk nog worden die waarden van x, in de omgeving van $x=0$ bepaald, waarvoor de integralen gegeven waarden krijgen, in 't bijzonder bij de nulplaatsen der integralen.

Het onderzoek onder 1⁰ vermeld, geschiedt door in (2) te stellen:

$$y=y'\,e^{-\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{k+\nu}\frac{x^\nu}{\nu}}$$

waardoor de vorm van de vergelijking dezelfde blijft, maar de coëfficient van x den vorm krijgt:

$$a_0+a_1 x+a_2 x^2+\ldots\ldots+a_k x^k.$$

Zonder aan de algemeenheid te kort te doen, kan $a_0=1$ genomen worden.

Wordt nu:

$$t=e^{-\left(\frac{1}{kx^k}+\frac{a_1}{(k-1)\,x^{k-1}}+\ldots+\frac{a_{k-1}}{x}\right)}.\ x^{a_k}\ldots\ldots \quad (3).$$

aangenomen, dan wordt als algemeene integraal van (2) gevonden:

$$y=C\,.\,t^{-1}+t^{-1}\int_0^x\frac{b_0+b_1 x+\ldots}{x^{k+1}}\,t\,dx\ldots\ldots \quad (4)$$

De integratieweg begint bij $x=0$ in zulk een richting dat: $\lim\limits_{x=0} t=0$ is.

14. De algemeene vergelijking:

Digitized by Google

$$x^{k+1}\frac{dy}{dx}+(1+a_1x+a_2x^2+\ldots+a_kx^k)\,y=b_0+b_1x+\ldots(5)$$

wordt formeel voldaan door:

$$y=c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots.$$

waarvan de coëfficienten te bepalen zijn.

Nu voert Horn k integralen van (5) in, n.l.:

$$y_m=t^{-1}\int_0^x\frac{b_0+b_1x+\ldots.}{x^{k+1}}\,t\,dx$$

(Uit (4) door $C=0$ te nemen). De integratieweg gaat uit van $x=0$, zóodanig, dat:

$$\frac{(4m-1)\pi}{2k}<arg.\,x<\frac{(4m+1)\pi}{2k}$$

Verder blijft x alléen in deze sector en in de beide aángrenzende, d. w. z. $arg.\,x$ blijft in 't gebied:

$$\frac{4m-3}{2k}\pi \quad \text{tot} \quad \frac{4m+3}{2k}\pi\,.$$

Wordt nu een functie aangenomen, waarbij dezelfde integratieweg gebruikt wordt als voor y, n.l.:

$$I_\nu=t^{-1}\int_0^x x^{\nu-k-1}\,t\,dx$$

dan komt er door partiëele integratie:

$$\int_0^x(1+a_1x+a_2x^2+\ldots a_kx^k)x^{\nu-k-1}\,t\,dx=x^\nu t-\nu\int_0^x x^{\nu-1}\,t\,dx$$

of:

$$I_\nu+a_1I_{\nu+1}+\ldots+a_{k-1}I_{\nu+k-1}+(a_k+\nu)\,I_{\nu+k}=x^\nu$$

Hierdoor wordt dan gevonden:

$$\sum_{\nu=0}^{n}c_\nu x^\nu=b_0I_0+b_1I_1+\ldots+b_nI_n-B_1I_{n+1}\ldots-B_kI_{n+k}$$

of:

Digitized by Google

$$y_m = \sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu I_\nu = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n + B_1 I_{n+1} + \ldots + B_k I_{n+k} +$$

$$+ b_{n+1} I_{n+1} + \text{enz.} \ldots$$

Stelt men:

$$y_m = \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda + \varepsilon_n x^n$$

dan wordt bewezen: $\quad | \varepsilon_n | < \varepsilon$

wanneer: $\quad | x | < \varrho_0$

waarin ϱ_0 een positieve grootheid voorstelt en *arg.* x in de aangegeven drie sectoren blijft.

Zoo wordt dan gevonden:

$$y_m \backsim \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda x^\lambda$$

voor: $\quad lim\, x = 0 \quad$ en $\quad \frac{(4m-3)\pi}{3k} < arg. x. < \frac{(4m+3)\pi}{2k}$

15. De algemeene integraal van (5) is:

$$y = C. t^{-1} + y_m$$

Beweegt x zich naar 0, zoodat:

$$\frac{(4m-1)}{2k} \pi < arg.\, x < \frac{(4m+1)}{2k} \pi$$

terwijl $C \neq 0$, dan is:

$lim\, t^{-1} = \infty$ en dus ook $lim\, y = \infty$. Voor deze grenzen van 't argument is dus y_m de integraal, die asymptotisch door de reeks wordt voorgesteld.

Verder vindt Horn, dat voor:

$$\frac{4m+1}{2k} \pi < arg.\, x < \frac{4m+3}{2k} \pi$$

elke integraal van (5) (uitgezonderd als $C = \infty$ wordt) asymptotisch voorgesteld wordt door:

Digitized by Google

$$y \sim \sum_{\lambda=0}^{n} c_\lambda \, x^\lambda$$

Het gedrag van de integraal in 't geval onder 2⁰ vermeld wordt bepaald door convergente reeksen.

16. Wanneer in de vergelijking:

$$x^{k+1} \frac{dy}{dx} + (1 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots a_k x^k)\, y = b_0 + b_1 x + \ldots$$

a_k géen geheel getal is, dan heeft de vergelijking een, in de omgeving van $x = 0$, eenwaardige integraal, die voorgesteld wordt door:

$$y = \sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty} p_\lambda \, x^\lambda$$

welke in de verschillende deelen van de omgeving van $x = 0$ verschillende asymptotische voorstellingen toelaat van den vorm:

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots - A_m \, e^{\frac{1}{kx^k} + \frac{a_1}{(k-1)\,x^{k-1}} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{x}} \, . \, x^{-a_k}$$

waar:

$$c_0 + c_1 x + \ldots$$

een reeks is, die formeel aan de vergelijking voldoet en in 't algemeen divergent is.

Voor $m = k$ is:

$$A_k = A_0 \, e^{2\pi i \, a_k}$$

Nu wordt aangetoond, dat de coëfficienten p_λ uit te drukken zijn door $A_0, A_1 \ldots A_{k-1}$ en $c_0, c_1 \ldots$ Dit geldt óók als a_k een geheel getal is, voor de functie P, die voorkomt in de integraal:

$$y = P(x) + B \, e^{\frac{1}{kx^k} + \frac{a_1}{(k-1)\,x}k-1 + \ldots + \frac{a_{k-1}}{x}} \; x^{-a_k} \log x$$

De functie $P(x)$ is in de omgeving van $x = 0$ eenwaardig.

Digitized by Google

De asymptotische voorstellingen worden gebruikt om 't gedrag van de integralen in de omgeving van $x=0$ te onderzoeken.

17. Verder beschouwt HORN nog de vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2}+x^k P(x)\frac{dy}{dx}+x^{2k} Q(x) y=0 \quad \ldots\ldots \quad (6)$$

waar k een geheel positief getal (óok 0) voorstelt en P en Q rationeele functies van x zijn, die in de omgeving van $x=\infty$ voorgesteld kunnen worden, door:

$$P=a_0+\frac{a_1}{x}+\frac{a_2}{x^2}+\ldots$$

$$Q=b_0+\frac{b_1}{x}+\frac{b_2}{x^2}+\ldots$$

Als de wortels α_1 en α_2 van de vergelijking:

$$\alpha^2+a_0\,\alpha+b_0=0$$

verschillen, wordt de gegeven vergelijking formeel voldaan door twee normale reeksen van THOMÉ, n.l.:

$$S_h=e^{\frac{\alpha_h\ \ x^p}{p}+\frac{\alpha_{h_1}\ \ x^{p-1}}{p-1}+\ldots}\,x^{\lambda h}\left\{A_h+\frac{A_{h_1}}{x}+\frac{A_{h_2}}{x^2}+\ldots\right\}$$

waar $h=1$ of 2 is.

A_{h_n} is van de orde: $\sqrt[p]{n!}$ $(p=k+1)$

Voor $k=0$ voert een passende omzetting van de sommatie van divergente reeksen volgens BOREL [1]) van de reeksen S_h tot de transformatie van LAPLACE, waarvan POINCARÉ [2]) gebruik heeft gemaakt om 't gedrag van irreguliere integralen van lineaire differentiaalvergelijkingen te onderzoeken. [3])

---

[1]) Ann. de l'école normale sup. 1899.

[2]) American Journal. 7. Acta Math. 8.

[3]) PICARD. Traité d'Analyse t. III. Ch. XIV.

Digitized by Google

Het geval waarvoor $k > 0$ is, is op dat, waar $k = 0$ is, terug te voeren door verhooging van de orde van de differentiaal-vergelijking.

Horn bepaalt nu het gedrag van de integralen van (6) in de nabijheid van 't onbepaalde punt $x = \infty$.[1])

18. Aan de algemeenheid wordt niet te kort gedaan door 't geval te nemen, waarvoor:

$$\alpha_1 = i \text{ en } \alpha_2 = -i$$

is. Vergelijking (6) bezit $2p$ integralen

$$\eta_1^{(\varrho)} \text{ en } \eta_2^{(\varrho)}$$

waar $\varrho = 0, 1, 2 \ldots p-1$, van zóódanigen vorm, dat in de nabijheid van $x = \infty$ voor:

$$\frac{2\varrho - 1}{p}\pi < arg\ x < \frac{2\varrho + 2}{p}\pi$$

$\eta_1^{(\varrho)}$ asymptotisch voorgesteld wordt door de reeks S_1 en voor:

$$\frac{2\varrho - 2}{p}\pi < arg\ x < \frac{2\varrho + 1}{p}\pi$$

$\eta_2^{(\varrho)}$ asymptotisch wordt voorgesteld door de reeks S_2.

De algemeene integraal wordt (afgezien van constante factoren) voor:

$$\frac{2\varrho\pi}{p} < arg\ x < \frac{(2\varrho + 1)\pi}{p}$$

asymptotisch voorgesteld door S_2 en voor:

$$\frac{(2\varrho - 1)\pi}{p} < arg\ x < \frac{2\varrho\pi}{p}$$

door S_1.

Om een willekeurige integraal y van (6) in de nabijheid van $arg\ x = 0$ te onderzoeken, zet men:

$$y = c_1\,\eta_1^{(0)} + c_2\,\eta_2^{(0)}$$

[1]) Math. Annalen 49 en 50.

Digitized by Google

Men vindt dan door formeele oplossing van de vergelijking:

$$c_1 S_1 + c_2 S_2 = 0$$

een asymptotische reeksontwikkeling voor de nulplaatsen van y in de nabijheid van $x = \infty$ met $arg\, x = 0$.

19. De vermelding van verdere beschouwingen en ontwikkelingen van HORN, zullen we hier (evenals geschied is met die van POINCARÉ, waarop ze een vervolg zijn) achterwege laten.

III. METHODE JACOBSTHAL.

20. De vergelijking:

$$z^2 \frac{d^2t}{dz^2} + [A + A_1 z^k] z \frac{dt}{dz} + [B + B_1 z^k] t = 0$$

met tweeledige recurrente betrekking en één onbepaald punt in 't oneindige, brengt JACOBSTHAL [1]) tot den normaalvorm:

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + (\overline{\alpha + \beta} + x) \frac{dy}{dx} + \alpha y = 0$$

Om tot een asymptotische voorstelling van den integraal in de omgeving van $x = \infty$ te komen, bepaalt JACOBSTHAL de divergente reeks, die formeel voldoet:

$$y = \frac{1}{x^\alpha} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Pi(\alpha + \nu - 1)}{\Pi(\beta - \nu - 1)\, \Pi(\nu)} \frac{1}{(-x)^\nu}$$

en splitst daarna die reeks in twee deelen $S_n + R_n$, waar S_n de som der termen tot en met de n^e voorstelt, terwijl R_n in den vorm van een bepaalde integraal wordt gezet. Daartoe wordt:

$$y = S_n$$

[1]) Asymptotische Darstellung v. Lösungen lin. Diff. gln. Math. Ann. Bd. 56 (1899).

Digitized by Google

in den normaalvorm gesubstitueerd, waardoor het eerste lid $\varphi(x)$ den vorm krijgt:

$$\varphi(x) = (-1)^n \frac{n}{x^{\alpha+n}} \frac{\Pi(\alpha+n-1)}{\Pi(\beta-n-1)\,\Pi(n)}$$

R_n krijgt dan de gedaante:

$$R_n = \int_x^\infty \varphi(\xi)\, e^\xi \,.\, \xi^{\alpha+\beta} \left[y_1(x)\, y_2(\xi) - y_2(x)\, y_1(\xi)\right] d\,\xi$$

waarin y_1 en y_2 twee particuliere integralen van den normaalvorm zijn.

Om nu een schatting van de grootte van R_n te kunnen maken, wordt de normale vergelijking door twee bepaalde integralen geïntegreerd, die x als parameter bevatten.

Als een dezer particuliere integralen wordt gevonden:

$$y_1 = I_1(x) = I(\alpha\,\beta\,x) = \frac{1}{\Pi(\beta-1)} \cdot \frac{1}{x^\prime} \int_0^\infty e^{-s} .\, s^{\alpha-1} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{\beta-1} ds$$

De tweede wordt gevonden door in den normaalvorm te substitueeren:

$$y = e^{-x} \,.\, \eta.$$

waardoor deze wordt:

$$x \frac{d^2\eta}{dx^2} + \{\overline{\beta+\alpha} - x\} \frac{d\eta}{dx} - \beta\eta = 0$$

d. i. dezelfde, als men α en β verwisselt en x vervangt door $-x$.

$$y_2 = e^{-x}\, I_2(x) = e^{-x} I(\beta, \alpha, -x) =$$

$$= \frac{e^{-x}}{\Pi(\alpha-1)} \cdot \frac{1}{x\beta} \int_0^\infty e^{-s}\, s^{\beta-1} \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{\alpha-1} ds$$

De integraties zijn oorspronkelijk als rechtlijnig aangenomen; bij den omloop van x om 't nulpunt wordt de integratieweg veranderd en 't gedrag van $I_1(x)$ en $I_2(x)$ bij deze omloop onderzocht.

Om de functies I_1 en I_2 in 't geheele vlak éenwaardig te maken, moet er een doorsnede gemaakt worden van 't

Digitized by Google

nulpunt uit, tot in 't oneindige in zekere richting. Om ze tevens eindig en continu te maken moet die doorsnede aangebracht worden langs de negatieve imaginaire as. Bij 't overschrijden door x van deze snede treedt discontinuïteit op, zoodat we 't vlak waarin x zich beweegt door deze snede begrensd moeten denken.

Hierdoor wordt een schatting van R_n mogelijk en krijgt men een bovenste grens van de fout; zijn n.l. k en l de grootste geheele getallen, die in α en β bevat zijn, zoodat:

$$\alpha = k + \varepsilon \text{ en } \beta = l + \zeta$$

dan vindt JACOBSTHAL voor bovenste grens:

$$\begin{array}{lll} \text{voor} & l = 0 & n^{3/2} \, . \, e^{-n} \\ & l = 1 & n^{1/2} \, . \, e^{-n} \\ & l > 1 & n^{-l+1/2} \, . \, e^{-n} \end{array}$$

die nog zeer ruim genomen zijn.

Als asymptotische voorstelling van de integralen y_1 en y_2 wordt dan gevonden:

$$y_1 = I_1(x) \sim S_n^{(1)}$$

$$y_2 = e^{-x} \; I_2(x) \backsim e^{-x} \; S_n^{(2)}$$

waar $S_n^{(1)} = S_n$ is en $S_n^{(2)}$ uit S_n volgt als men β, α en $-x$ in de plaats stelt voor α, β en x.

Deze voorstelling geldt nu voor de geheele omgeving van 't oneindige punt.

In de omgeving van het nulpunt krijgt JACOBSTHAL de convergente ontwikkelingen:

$$Y_1 = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Pi(\nu + \alpha - 1)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu + \alpha + \beta - 1)} (-x)^\nu$$

$$Y_2 = x^{1-\alpha-\beta} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\Pi(\nu - \beta)}{\Pi(\nu)\,\Pi(\nu - \alpha - \beta + 1)} (-x)^\nu$$

Deze convergeeren slecht voor groote waarde van 't argument; voor dit geval worden ze vervangen door de asymptotische uitdrukkingen:

Digitized by Google

$$Y_1 \backsim c'_1 \; S_n^{(1)} + e^{-x} c'_2 \; S_n^{(2)}$$
$$Y_2 \backsim C'_1 \; S_n^{(1)} + e^{-x} C'_2 \; S_n^{(2)}.$$

IV. Voorbeelden.

21. Nemen we als voorbeeld de vergelijking:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a}{x} + 1\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = 0 \; \ldots \ldots \; (1)$$

waarin a reëel en positief is.

Stellen we dat:

$$y = m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \; \ldots \ldots \ldots \; (2)$$

formeel aan (1) voldoet voor $x = \infty$.

Nu is dus:

$$y = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{m_n}{x^n} \; ; \; \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{n\, m_n}{x^{n+1}} \; ; \; \frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)m_n}{x^{n+2}} \; . \; (3)$$

Bij substitutie wordt dan gevonden:

$$\frac{m_o}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{n\,(n+1-a)\,m_n}{x^{n+2}} - \frac{(n-1)\,m_n}{x^{n+1}}\right] = 0 \; . \; . \; (1')$$

of:
$$\frac{m_o}{x} + \sum_{n=2}^{\infty} (n-1) \frac{(n-a)\,m_{n-1} - m_n}{x^{n+1}} = 0 \; \ldots \; (1'')$$

zoodat $m_o = 0$ en $m_1 =$ arbitraire constante.

Voor de coëfficienten geldt dan de betrekking:

$$m_{n-1}\,(n-a) - m_n = 0 \qquad (n \geqslant 2). \; \ldots \; (4)$$

Uit (4) volgt, dat (2) divergent is. Schrijven we nu (4) in den vorm:

$$m_n = (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} \cdot m_1 \; \ldots \ldots \; (4')$$

Uit (4') en (3) volgt dan de formeele ontwikkeling:

Digitized by Google

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} \cdot m_1 \cdot \frac{1}{x^n} \quad \ldots\ldots (5)$$

Is a een geheel getal, dan is y een rationeele functie van x: de reeks heeft een eindig aantal termen. Is a niet geheel, dan is (5) oneindig doorloopend.

We nemen in het laatste geval een eindig aantal $(p-1)$ termen, zoodat:

$$S_p = \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n-1} \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} \cdot m_1 \cdot \frac{1}{x^n} \quad \ldots\ldots (5')$$

waaruit volgt:

$$y = S_p + R_p .$$

Bij invoering hiervan, wordt (1):

$$\sum_{n=1}^{p-1} \{m_{n-1}(n-a) - m_n\} \frac{1}{x^n} + \sum_{n=p}^{\infty} \{m_{n-1}(n-a) - m_n\} \frac{1}{x^n} = F(S_\infty)$$

als we de waarde van 't 1e lid van (1) voorstellen door $F(y)$. Door S_∞ te vervangen door S_p stellen we eigenlijk:

$$m_p = m_{p+1} = \ldots = m_\infty = o$$

Zoo komt er dan:

$$F(S_p) = \sum_{n=1}^{p-1} \{m_{n-1}(n-a) - m_n\} \frac{1}{x^n} + m_{p-1}(p-a) \frac{1}{x^p}$$

Het eerste deel van 't tweede lid is nul wegens de betrekking tusschen de coëfficienten, uitgedrukt door (4); dus krijgen we:

$$F(S_p) = m_{p-1}(p-a) \frac{1}{x^p} = \psi(x) \quad \ldots\ldots (6)$$

Deze niet-homogeene vergelijking kan geïntegreerd worden met behulp van twee lineair onafhankelijke integralen $Y_\varkappa$ en Y_λ van de homogeene vergelijking (1)

Als integraal van (6) vinden we dan eene uitdrukking:

$$S = A\, Y_\varkappa + B\, Y_\lambda \quad \ldots\ldots\ldots (6')$$

waar A en B functies van x zijn, die bepaald worden uit:

Digitized by Google

$$\left. \begin{aligned} \left(Y_\varkappa \frac{dY_\lambda}{dx} - Y_\lambda \frac{dY_\varkappa}{dx} \right) \frac{dA}{dx} &= - Y_\lambda \, \psi(x) \ldots \\ \left(Y_\varkappa \frac{dY_\lambda}{dx} - Y_\lambda \frac{dY_\varkappa}{dx} \right) \frac{dB}{dx} &= Y_\varkappa \, \psi(x) \ldots . \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Verder volgt uit (1):

$$Y_\varkappa \frac{dY_\lambda}{dx} - Y_\lambda \frac{dY_\varkappa}{dx} = C x^{-a} e^{-x} \quad \ldots \ldots \quad (8)$$

De waarde van C hangt af van de keuze der coëfficienten van Y_λ en $Y_\varkappa$; deze kiezen we nu zoo, dat $C = -1$ is.

$$Y_\varkappa \frac{dY_\lambda}{dx} - Y_\lambda \frac{dY_\varkappa}{dx} = - x^{-a} e^{-x} \ldots \ldots \quad (9)$$

Door invoering van de integratievariabele t, krijgen we uit (7) en (9):

$$A = - \int_x^\infty \psi(t) . e^t . t^a \, Y_\lambda(t) \, dt + C_1$$

$$B = \int_x^\infty \psi(t) . e^t . t^a \, Y_\varkappa(t) dt + C_2$$

De integraal van (6) is dus volgens (6′):

$$S = C_1 \, Y_\varkappa + C_2 \, Y_\lambda -$$
$$- \int_x^\infty \psi(t) \, e^t . t^a \, \{ Y_\varkappa(x) \, Y_\lambda(t) - Y_\lambda(x) . Y_\varkappa(t) \} \, dt \ldots \quad (10)$$

S_p is een particuliere integraal van (6), dus gaat bij gepaste keuze van de constanten C_1 en C_2, S over in S_p. Ook is:

$$C_1 \, Y_\varkappa + C_2 \, Y_\lambda = y$$

een particuliere integraal van (1) voor de zooeven aangeduide keuze van C_1 en C_2.

$$y = S_p + R_p$$

of

$$R_p = y - S_p \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11)$$

Digitized by Google

verandert nu in de uitdrukking:

$$R_p = \int_x^\infty \psi(t)\, e^t . t^a \{ Y_\varkappa(x)\, Y_\lambda(t) - Y_\lambda(x)\, Y_\varkappa(t) \}\, dt \ldots \quad (11^1)$$

De restterm van de divergente reeks, die aan (1) formeel voldoet, is hiermede uitgedrukt als een bepaalde integraal. Om een schatting van de waarde van R_p te krijgen moeten $Y_\varkappa$ en Y_λ behoorlijk gekozen worden. Daartoe moet (1) door een bepaalde integraal voldaan worden.

Vergelijking (1) wordt verkregen uit de vergelijking van de hypergeometrische reeks:

$$x_1(1-x_1)\frac{d^2y}{dx_1{}^2} + [\gamma - (\alpha+\beta+1)\, x_1]\frac{dy}{dx_1} - \alpha\beta y = 0 \ldots \quad (12)$$

door daarin te nemen:

$$\alpha = -m \quad ; \quad \gamma = a \quad ; \quad \beta = 1 \quad ; \quad x_1 = \frac{x}{m} \qquad \text{als:}$$

$$x\left(1 - \frac{x}{m}\right)\frac{d^2y}{dx^2} + \left[a - (-m+2)\frac{x}{m}\right]\frac{dy}{dx} + y = 0.$$

Wordt hierin $m = \infty$ gesteld, dan krijgen we, na door x gedeeld te hebben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{a}{x} + 1\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}\, y = 0\,.$$

Aan (12) wordt voldaan door:

$$\varphi(x_1) = C\int_0^1 t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}(1-tx_1)^{-\alpha}\, dt\,.$$

Door hier dezelfde substituties, enz., toe te passen als zooeven, wordt 't tweede lid:

$$C\int_0^1 (1-t)^{a-2}\left(1 - \frac{t\,x}{m}\right)^m dt$$

welke uitdrukking van $m = \infty$ overgaat in (als we tegelijk $t = \dfrac{s}{x}$ nemen):

Digitized by Google

$$Y_x = C\int_0^x \frac{1}{x}\left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s}\,ds$$

$$Y_x = \frac{C}{x}\int_0^x \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s}\,ds \ldots\ldots\ldots (13)$$

Dit is nu een particuliere oplossing van (1). De bovenste grens is nog variabel; om deze vast te leggen, substitueeren we (13) met grenzen 0 en p in (1) (doch schrijven die grenzen niet) en krijgen dan:

$$F(Y_\nu) = -\frac{C(a-2)}{x^3}\int \frac{d}{ds}\left\{ e^{-s} s \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-3} \right\} ds$$

Om deze uitdrukking nul te doen zijn, zooals geëischt wordt, is 't noodig twee grenzen te kiezen, zoodat

$$e^{-s}\,.\,s\left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-3} = 0$$

is; dit is 't geval voor $s = 0$ en $s = \infty$ waardoor nu de bovenste grens bepaald is. We nemen dus:

$$Y_x = C\int_0^\infty \frac{1}{x}\left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s}\,ds \ldots\ldots (14)$$

Een tweede particuliere integraal van (1) vinden we door te nemen:

$$y = e^{-x}\,.\,z$$

Dit geeft dan:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{a}{x} - 1\right)\frac{dz}{dx} + \frac{1-a}{x} z = 0$$

Veranderen we hierin x in $-x$, dan komt er:

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left(\frac{a}{x} + 1\right)\frac{dz}{dx} + \frac{a-1}{x} z = 0. \ldots\ldots (15)$$

die denzelfden vorm heeft als (1). De coëfficient van $\frac{z}{x}$ is $a - 1$ inplaats van 1. Trachten we aan (15) te voldoen door een integraal van den vorm (13) d. w. z.:

Digitized by Google

$$z = C' \int_0^\infty \frac{s^\gamma}{x^\alpha} \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{\beta-2} e^{-s}\, ds$$

waarin α, β en γ nog bepaald moeten worden, dan vinden we bij substitutie:

$$C. \frac{1}{x^\alpha} \int \left(1 + \frac{s}{x}\right)^{\beta-4} . s^\gamma e^{-s} \left[\left\{ \frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} - \frac{a\alpha}{x^2} + \frac{a-1}{x} - \frac{\alpha}{x} \right\} \times \right.$$

$$\times \left(1 + \frac{s}{x}\right)^2 + \left\{ - \frac{\alpha(\beta-2)}{x^3} - \frac{(\alpha+2)(\beta-2)}{x^3} + \right.$$

$$\left. + \frac{\alpha(\beta-2)}{x^3} + \frac{\beta-2}{x^2} \right\} \left(1 + \frac{s}{x}\right) s + \left. \frac{(\beta-2)(\beta-3)}{x^4} s^2 \right] e^{-s}\, ds = 0$$

De grenzen zijn reeds gekozen; het nul worden moet dus alléen afhankelijk gesteld worden van de keuze van α en β, zoodat 't polynomium onder 't integraalteeken nul moet zijn, d. w. z.:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\alpha(\alpha+1)}{x^2} - \frac{a\alpha}{x^2} + \frac{a-1}{x} - \frac{\alpha}{x} = 0 \\ &- \frac{\alpha(\beta-2)}{x^3} - \frac{(\alpha+2)(\beta-2)}{x^3} + \frac{\alpha(\beta-2)}{x^3} + \frac{(\beta-2)}{x^2} = 0 \\ &\frac{(\beta-2)(\beta-3)}{x^4} = 0 \end{aligned}\right\} \quad . . (16)$$

De eerste van deze, in den vorm geschreven:

$$\frac{\alpha(\alpha+1-a)}{x^2} + \frac{a-1-\alpha}{x} = 0$$

doet zien dat: $\alpha = a - 1$ gekozen moet worden. Aan de beide andere wordt voldaan door te nemen $\beta = 2$. De tweede particuliere oplossing van (1) wordt dan:

$$Y_\lambda = C' \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \int_0^\infty s^\gamma \left(1 + \frac{s}{x}\right)^0 e^{-s}\, ds$$

$$= C' \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \int_0^\infty s^\gamma e^{-s}\, ds$$

Om een waarde voor γ te krijgen, merken we op dat in $Y_\varkappa$ en Y_λ de exponenten juist verwisseld zijn; in 't eerste

geval toch hadden we $\frac{1}{x}$ als coëfficient van y; in 't tweede geval $\frac{a-1}{x}$; in 't 1e geval was 0 d. i. $1-1$ de exponent van s, nu zal γ dus $= a - 2$ zijn.

Zoodat:

$$Y_\lambda = C' \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \cdot \int_0^\infty s^{a-2} e^{-s} . ds = C' \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \Gamma(a-1) = C_1 \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} . \quad (17)$$

Uit formule (11′) gaan we nu een benadering voor de rest zoeken en vinden dan:

$$R_p = CC' \int_x^\infty m_{p-1} (p-a) \frac{1}{x^p} \cdot e^t t^a \left[\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{e^{-t}}{t^{a-1}} - \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{a-2} e^{-t} ds \right] dt$$

$$= CC_1 \int_x^\infty m_{p-1} (p-a) \frac{1}{x^p} t^a \left[\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right\} \frac{1}{t^{a-1}} \right.$$

$$\left. - \frac{e^{t-x}}{x^{a-1}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right] dt =$$

$$= CC_1 m_{p-1} (p-a) \frac{1}{x^p} \int_x^\infty \left[t \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s} ds - \right.$$

$$\left. - \frac{t^a}{x^{a-1}} e^{t-x} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right] dt$$

t gaat langs de reëele as van x tot ∞; x nadert tot ∞; x en t verschillen dus zoo weinig men wil, dus de vorm onder 't integraalteeken is zoo klein men wil. Zoodat nu:

$$R_p = C\, C_1\, m_{p-1} (p-a) . \frac{1}{x^p} \int_x^\infty \varepsilon \, dt$$

$$\lim_{x=\infty} R_p = \lim_{x=\infty} \left[\frac{\eta}{x^{p-1}} \right]$$

Door gebruik te maken van formule (11) zien we, dat:

$$\lim_{x=\infty} (y - S_p) = \lim_{x=\infty} \left(\frac{\eta}{x^{p-1}} \right).$$

Digitized by Google

of:

$$\lim_{x=\infty} x^{p-1} \{y - S_p\} = \eta$$

waaruit volgt dat reeks (5′) werkelijk een asymptotische ontwikkeling is:

$$Y_x \sim \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} m_1 \cdot \frac{1}{x^n} \quad \ldots . \; (18)$$

De algemeene integraal van de gegeven vergelijking wordt dan voorgesteld door:

$$C \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n+1} . \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} m_1 . \frac{1}{x^n} + C_1 . \frac{e^{-x}}{x^{a-1}}$$

De hier gebruikte methode is eene navolging van de door JACOBSTHAL aangewende.

22. Nemen we de vergelijking van de derde orde:

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (s+qx+rx^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (a+bx) \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

en stellen we dat:

$$y = m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{x^3} + \ldots$$

formeel voldoet; dan is:

$$y = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{m_n}{x^n} ; \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{n . m_n}{x^{n+1}} ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)m_n}{x^{n+2}} ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \sum_{n=1}^{m} - \frac{n(n+1)(n+2)m_n}{x^{n+3}} .$$

De eerste schrijven we liever in den vorm:

$$y = m_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{x^n}$$

Bij substitutie blijkt:

$$m_o = 0 \; ; \; m_1 = \text{arbitrair en } c - b + 2r = 0$$

als eisch voor de getalcoëfficienten.

Digitized by Google

geval toch hadden we $\frac{1}{x}$ als coëfficient van y; in 't tweede geval $\frac{a-1}{x}$; in 't 1e geval was 0 d. i. 1 − 1 de exponent van s, nu zal γ dus $= a - 2$ zijn.

Zoodat:

$$Y_\lambda = C' \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \cdot \int_0^\infty s^{a-2} e^{-s} \cdot ds = C' \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \Gamma(a-1) = C_1 \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} . \quad (17)$$

Uit formule (11′) gaan we nu een benadering voor de rest zoeken en vinden dan:

$$R_p = CC' \int_x^\infty m_{p-1}(p-a) \frac{1}{x^p} \cdot e^t t^a \left[\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right\} \times \right.$$

$$\left. \times \frac{e^{-t}}{t^{a-1}} - \frac{e^{-x}}{x^{a-1}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{a-2} e^{-t} ds \right] dt$$

$$= CC_1 \int_x^\infty m_{p-1}(p-a) \frac{1}{x^p} t^a \left[\int_0^\infty \left\{ \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right\} \frac{1}{t^{a-1}} \right.$$

$$\left. - \frac{e^{t-x}}{x^{a-1}} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right] dt =$$

$$= CC_1\, m_{p-1}(p-a) \frac{1}{x^p} \int_x^\infty \left[t \int_0^\infty \frac{1}{x} \left(1 - \frac{s}{x}\right)^{a-2} e^{-s} ds - \right.$$

$$\left. - \frac{t^a}{x^{a-1}} e^{t-x} \int_0^\infty \frac{1}{t} \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{a-2} e^{-s} ds \right] dt$$

t gaat langs de reëele as van x tot ∞; x nadert tot ∞; x en t verschillen dus zoo weinig men wil, dus de vorm onder 't integraalteeken is zoo klein men wil. Zoodat nu:

$$R_p = C\, C_1\, m_{p-1}(p-a) \cdot \frac{1}{x^p} \int_x^\infty \varepsilon\, dt$$

$$\lim_{x=\infty} R_p = \lim_{x=\infty} \left[\frac{\eta}{x^{p-1}} \right]$$

Door gebruik te maken van formule (11) zien we, dat:

$$\lim_{x=\infty} (y - S_p) = \lim_{x=\infty} \left(\frac{\eta}{x^{p-1}} \right).$$

Digitized by Google

of:

$$\lim_{x=\infty} x^{p-1} \{y - S_p\} = \eta$$

waaruit volgt dat reeks (5′) werkelijk een asymptotische ontwikkeling is:

$$Y_x \backsim \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n+1} \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} m_1 \cdot \frac{1}{x^n} \quad \ldots \ldots (18)$$

De algemeene integraal van de gegeven vergelijking wordt dan voorgesteld door:

$$C \sum_{n=1}^{p-1} (-1)^{n+1} \cdot \frac{\Gamma(a-1)}{\Gamma(a-n)} m_1 \cdot \frac{1}{x^n} + C_1 \cdot \frac{e^{-x}}{x^{a-1}}$$

De hier gebruikte methode is eene navolging van de door JACOBSTHAL aangewende.

22. Nemen we de vergelijking van de derde orde:

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (s+qx+rx^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (a+bx) \frac{dy}{dx} + cy = 0$$

en stellen we dat:

$$y = m_o + \frac{m_1}{x} + \frac{m_2}{x^2} + \frac{m_3}{x^3} + \ldots$$

formeel voldoet; dan is:

$$y = \sum_{n=o}^{\infty} \frac{m_n}{x^n} ; \quad \frac{dy}{dx} = \sum_{n=1}^{\infty} - \frac{n \cdot m_n}{x^{n+1}} ;$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)m_n}{x^{n+2}} ; \quad \frac{d^3y}{dx^3} = \sum_{n=1}^{m} - \frac{n(n+1)(n+2)m_n}{x^{n+3}} .$$

De eerste schrijven we liever in den vorm:

$$y = m_o + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_n}{x^n}$$

Bij substitutie blijkt:

$$m_o = 0 \;;\; m_1 = \text{arbitrair en } c - b + 2r = 0$$

als eisch voor de getalcoëfficienten.

Digitized by Google

De betrekkingen der coëfficienten m zijn:

$$-1.2.3\, m_1 + 1.2\, q.\, m_1 + 2.3\, r\, m_2 - a m_1 - 2b\, m_2 + c\, m_2 = 0$$

$$-2.3.4\, m_2 + 2\, s\, m_1 + 2.3\, q\, m_2 + 3.4\, r\, m_3 - 2\, a\, m_2 - 3\, b\, m_3 + c\, m_3 = 0$$

$$-3.4.5\, m_3 + 2.3\, s\, m_2 + 3.4\, q\, m_3 + 4.5\, r\, m_4 - 3\, a\, m_3 - 4\, b\, m_4 + c\, m_4 = 0$$

of in 't algemeen:

$$-(p-1)p(p+1)m_{p-1} + (p-2)(p-1)s\, m_{p-2} + (p-1)p\, q\, m_{p-1} +$$
$$+ p(p+1)\, r\, m_p - (p-1)\, a\, m_{p-1} + p\, b\, m_p + c\, m_p = 0.$$

Als recurrente betrekking vinden we dus:

$$\{c + p(p+1)\, r - p\, b\}\, m_p + (p-1)\{-p(p+1) + p\, q - a\}\, m_{p-1} +$$
$$+ (p-2)(p-1)\, s\, m_{p-2} = 0.$$
$$(p \geqslant 2).$$

23. Door $s=0$ te nemen wordt de vergelijking:

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (q\, x + r x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (a + bx) \frac{dy}{dx} + cy = 0.$$

Voor deze is dan ook:

$m_0 = 0$; m_1 arbitrair en $c - b + 2r = 0$ eisch, waaraan de getalcoëfficienten voldoen moeten.

De recurrente betrekking wordt eenvoudiger, n.l.:

$$\{c + p(p+1)r - pb\}\, m_p + (p-1)\{-p(p+1) + pq - a\}\, m_{p-1} = 0 \quad (p \geqslant 2)$$

of:

$$m_p = \frac{(2.3+a-2q)(3.4+a-3q)(4.5+a-4q)\ldots\{(p+1)p+a-(p-1)q\}\{p(p+1)+a-pq\}(p-1)!}{(2.3r+c-2b)(3.4r+c-3b)(4.5r+c-4b)\ldots\{(p-1)pr+c-(p-1)b\}\{p(p+1)r+c+pb\}}\, m_1$$

24. Voor $r=1$, $a=c$ en $q=b$ wordt de vergelijking:

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (bx + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (a + bx) \frac{dy}{dx} + ay = 0$$

met eisch: $a - b = -2$

terwijl de recurrente betrekking der coëfficenten m dan is:

$$m_p = (p-1)!\, m_1.$$

Digitized by Google

Zoo krijgen we dan de vergelijking:

$$x^2 \frac{d^3y}{dx^3} + (\overline{a+2}\,x + x^2) \frac{d^2y}{dx^2} + (a + \overline{a+2}\,x) \frac{dy}{dx} + ay = 0. \quad (1)$$

waaraan formeel voldaan wordt door:

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2\,!}{x^3} + \frac{3\,!}{x^4} + \ldots \text{ enz.} \;.\;.\;.\;.\;.\; (2)$$

Deze reeks is in 't algemeen divergent.

We vinden als integraal van (1) echter:

$$y = \int_0^x \frac{e^{t-x} - e^{-x}}{t}\, dt \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (3)$$

voor x reëel en positief.

Volgens Hoofdstuk III is te vinden, dat (2) de asymptotische ontwikkeling van (3) is. Volgens Hoofdstuk IV is (2) dus een integraal van de vergelijking (1).

Door nu in (1) te stellen:

$$y = e^{-x}.\,z$$

gaat deze over in:

$$x^2 \frac{d^3z}{dx^3} + (\overline{a+2}\,x - 2x^2) \frac{d^2z}{dx^2} + (x^2 - \overline{a+2}\,x + a) \frac{dz}{dx} = 0 \ldots (4)$$

of $\frac{dz}{dx} = t$ stellende:

$$x^2 \frac{d^2t}{dx^2} + (\overline{a+2}\,x - 2x^2) \frac{dt}{dx} + (x^2 - \overline{a+2}\,x + a)\, t = 0 \;.\;.\;.\; (5)$$

Aan deze vergelijking wordt voldaan door de particuliere integraal

$$t = \frac{1}{x}\, e^x.$$

Door middel van deze particuliere integraal vinden we een tweede, n.l.:

$$t = \frac{e^x}{1-a}\, x^{-a}$$

dus:

Digitized by Google

$$\frac{dz}{dx} = A\,\frac{e^x}{x} + B\,\frac{e^x}{1-a}\,x^{-a}$$

of:

$$z = A\,e^x \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \ldots \right\} +$$

$$+ \frac{B}{1-a} \cdot \frac{1}{(a-1)!} \cdot \frac{e^x}{x^a} \left\{ (a-1)! + \frac{a!}{x} + \frac{(a+1)!}{x^2} + \frac{(a+2)!}{x^3} + \ldots \right\}$$

Zoodat een integraal van (1) wordt voorgesteld door:

$$y = e^{-x}.\,z = A \left\{ \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \ldots \right\} +$$

$$+ \frac{B}{(1-a)} \cdot \frac{1}{(a-1)!} \cdot \frac{1}{x^a} \left\{ (a-1)! + \frac{a!}{x} + \frac{(a+1)!}{x^2} + \ldots \right\} \ldots (6)$$

Daardoor vinden we de particuliere integralen:

$$y_1 = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{2!}{x^3} + \frac{3!}{x^4} + \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

(dezelfde als (2)) en

$$y_2 = \frac{1}{(a-1)!\,x^a} \left\{ (a-1)! + \frac{a!}{x} + \frac{(a+1)!}{x^2} + \ldots \right\} \ldots \quad (8)$$

Is a een geheel positief getal, dan is (8) van een bepaalden term af, gelijk loopend met (7).

24. Door te stellen:

$$y = x^{\varrho} \left(A_0 + \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x^2} + \ldots \right)$$

Krijgen we:

$$\varrho_1 = -1 \text{ en } \varrho_2 = -a$$

terwijl voor $\varrho_2 = -a$:

$$A_1 = a\,A_0$$

blijkt te zijn; op deze wijze krijgen we dezelfde reeksen als zooeven.

Digitized by Google

25. Trachten we een vergelijking van de tweede orde te vinden, die na differentiatie (1) oplevert en stellen we die voor door:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = C$$

dan zien we, dat gekozen moet worden:

$$Q = ax; \; P = x^2 + ax$$

De gezochte vergelijking is dus:

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + (x^2 + ax) \frac{dy}{dx} + axy = C$$

Schrijven we deze als:

$$x^2 \left(\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx}\right) + ax \left(\frac{dy}{dx} + y\right) = C$$

en stellen we hierin:

$$\frac{dy}{dx} + y = z$$

dan gaat de vergelijking over in:

$$x^2 \frac{dz}{dx} + axz = C$$

waarvan de integraal is:

$$z = \frac{C}{(a-1)x} + \frac{C\,C'}{x^a}$$

zoodat:

$$\frac{dy}{dx} + y = \frac{C}{(a-1)x} + \frac{C\,C'}{x^a}$$

waarvan de algemeene integraal is:

$$y = e^{-x} \frac{C}{a-1} \int \frac{e^x\,dx}{x} + C\,C'\,e^{-x} \int \frac{e^x\,dx}{x^a} + C''e^{-x}$$

De derde particuliere integraal, die hier optreedt is ook te vinden uit (4).

Digitized by Google

NOOT I.

Neem φ en f als functies van de variabele a zóo dat:

$$\varphi = \int f\,da\,.$$

Volgens TAYLOR is:

$$\varphi(a+h) = \varphi(a) + hf(a) + \frac{h^2}{2!}f'(a) + \frac{h^3}{3!}f''(a) + \ldots \quad (1)$$

of:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(a+h) - \varphi(a) = hf(a) + \frac{h^2}{2!}f'(a) + \frac{h^3}{3!}f''(a) + \ldots\ldots\\
&\varphi(a+2h) - \varphi(a+h) = hf(a+h) + \frac{h^2}{2!}f'(a+h) + \frac{h^3}{3!}f''(a+h) + \ldots\\
&\varphi(a+3h) - \varphi(a+2h) = hf(a+2h) + \frac{h^2}{2!}f'(a+2h) + \frac{h^3}{3!}f''(a+2h) + \ldots\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\varphi(a+ph) - \varphi(a+\overline{p-1}h) = hf(a+\overline{p-1}h) + \frac{h^2}{2!}f'(a+\overline{p-1}h) + \ldots
\end{aligned}\right\}(2)$$

Tellen we de eerste en tweede leden van deze vergelijkingen bij elkaar op, dan komt er:

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi(a+ph) - \varphi(a) =\\
&h\,\{f(a) + f(a+h) + f(a+2h) + \cdots + f(a+\overline{p-1}h)\} +\\
&+ \frac{h^2}{2!}\{f'(a) + f'(a+h) + f'(a+2h) + \cdots + f'(a+\overline{p-1}h)\} +\\
&\qquad + \text{enz.}
\end{aligned}\right\}(3)$$

Digitized by Google

'tEerste lid van de nu verkregen vergelijking is niets anders dan:

$$\int_a^{a+ph} f(a)\,da$$

de vergelijking is dus te schrijven:

$$\int_a^{a+ph} f(a)\,da = h\sum_{\nu=o}^{p-1} f(a+\nu h) + \frac{h^2}{2!}\sum_{\nu=o}^{p-1} f'(a+\nu h) + \text{enz.}\ldots \quad (4)$$

Door in (3) φ te vervangen door f, daarna f door f', f' door f'' enz., krijgen we achtereenvolgens:

$$f(a+ph)-f(a) = h\sum_{\nu=o}^{p-1} f'(a+\nu h) + \frac{h^2}{2!}\sum_{\nu=o}^{p-1} f''(a+\nu h) + \text{enz.} \quad (5)$$

$$f'(a+ph)-f'(a) = h\sum_{\nu=o}^{p-1} f''(a+\nu h) + \frac{h^2}{2!}\sum_{\nu=o}^{p-1} f'''(a+\nu h) + \text{enz.} \quad (6)$$

enz.

Vermenigvuldigen we nu beide leden van (4) met 1, van (5) met $A_1\,h$; van (6) met $A_2\,h^2$ enz., waar de coëfficienten A later bepaald zullen worden en tellen we de overeenkomstige leden op, dan krijgen we:

$$\left.\begin{aligned} &\int_a^{a+ph} f(a)\,da + A_1 h\,\{f(a+ph)-f(a)\} + A_2 h^2\,\{f'(a+ph)- \\ &-f'(a)\} + A_3 h^3\,\{f''(a+ph)-f''(a)\} + \cdots = h\sum_{\nu=o}^{p-1} f(a+\nu h) + \\ &\qquad + h^2\left(\frac{1}{1.2}+A_1\right)\sum_{\nu=o}^{p-1} f'(a+\nu h) + \\ &\qquad + h^3\left(\frac{1}{3!}+\frac{A_1}{2!}+\frac{A_2}{1!}\right)\sum_{\nu=o}^{p-1} f''(a+\nu h) + \text{enz.} \end{aligned}\right\} \quad (7)$$

Digitized by Google

De coëfficienten A worden nu zóo gekozen, dat alle termen van 't 2e lid, behalve de eerste natuurlijk, nul worden (daardoor wordt tevens de voorwaarde ingevoerd, dat géen der functies f, f', f'', enz. ∞ mag worden).

De vergelijking gaat dan, als we de leden verwisselen, over in:

$$h\sum_{\nu=o}^{p-1} f(a+\nu h)=\int_a^{a+ph} f(a)\,da + A_1 h\,\{f(a+ph)-f(a)\} + A_2 h^2\{f'(a+ph)-$$
$$-f'(a)\}+A_3 h^3\{f''(a+ph)-f''(a)\}+A_4 h^4\{f'''(a+ph)-f'''(a)\}+\ldots \quad (8)$$

waarin nu nog de coëfficienten A door hunne waarden vervangen dienen te worden. Deze vinden we door $f(a)$ speciale waarden te geven. Stellen we n.l:

$$f(a)=e^a$$

en substitueeren we dit in (8) dan krijgen we:

$$h\{e^a+e^{a+h}+\cdots e^{a+(p-1)h}\}=(e^{a+ph}-e^a)(1+A_1h+A_2h^2+\ldots\ldots)$$

$$h.e^a\left\{\frac{1}{1-e^h}-\frac{e^{ph}}{1-e^h}\right\}=e^a(e^{ph}-1)(1+A_1h+A_2h^2+\ldots\ldots)$$

deelende door: $h.e^a.(e^{ph}-1)$ komt er:

$$\frac{1}{e^h-1}=\frac{1}{h}+A_1+A_2h+A_3h^2+A_4h^3+\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

Door hierin te nemen $h=2iz$ vinden we dat $A_1=-\frac{1}{2}$ wordt, maar de overige coëfficienten met oneven index alle nul worden. Dus (8) gaat over in:

$$h\sum_{\nu=o}^{p-1} f(a+\nu h)=\int_a^{\imath+ph} f(a)\,da-\frac{h}{2}\{f(a+ph)-f(a)\}+A_2h^2\{f'(a+ph)-f'(a)\}+$$
$$+A_4h^4\{f'''(a+ph)-f'''(a)\}+A_6h^6\{f^{v}(a+ph)-f^{v}(a)\}+\text{ enz.} \ldots\ldots\ldots \quad (10)$$

Vergelijken we vergelijking (9) met de bekende betrekking:

$$\frac{1}{e^h-1}=\frac{1}{h}-\frac{1}{2}+\frac{B_1}{2!}h-\frac{B_2}{4!}h^3+\text{enz}\ldots$$

Digitized by Google

dan zien we:

$$A_2 = \frac{B_1}{2!} \quad ; \quad A_4 = -\frac{B_3}{4!} \quad ; \quad A_6 = \frac{B_3}{6!} \text{ ; enz.}$$

Door dit in (10) te substitueeren krijgen we den algemeenen vorm:

$$h \sum_{\nu=0}^{p-1} f(a+\nu h) = \int_a^{a+ph} f(x)\, dx - \frac{h}{2} \{f(a+ph) - f(a)\} +$$

$$+ \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \frac{B_\nu \; h^{2\nu}}{(2\nu)!} \{f^{2\nu-1}(a+ph) - f^{2\nu-1}(a)\} + R_{2n+1}$$

$$B_1 = \frac{1}{6} \quad ; \quad B_2 = \frac{1}{30} \quad ; \quad B_3 = \frac{1}{42} \text{ ; enz.}$$

(Zie hierover o.a. Schlömilch. Handbuch der Diff. und Integr. Rechnung 1847, pag. 235. Maclaurin. Treatise of fluxions 1742, pag 672, of de fransche vertaling hiervan 1749. IIe partie pag. 146 en vlg.)

Digitized by Google

NOOT II.

Formule (3) van Hoofdstuk II wordt op de volgende wijze gevonden:

Onder de totale residu van een functie $\Phi(x)$ wordt verstaan de integraal:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_R \Phi(z)\,dz$$

genomen langs den omtrek van een cirkel c met oneindigen straal R

Men heeft dus:

$$\mathcal{E}((\Phi(z))) = \frac{1}{2\pi i}\int_R \Phi(z)\,dz.$$

Vervangt men nu $\Phi(z)$ door:

$$\frac{f(z)}{x-z}$$

en schrijft tevens:

$$z = \frac{1}{t}$$

in de integraal, dan komt er:

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)\right) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\frac{1}{R}} \frac{f\left(\frac{1}{t}\right)}{t(1-tx)}\,dt$$

waarin nu de integraal in negatieven zin genomen wordt

Digitized by Google

langs den omtrek van een cirkel met zeer kleinen straal $\frac{1}{R}$. Men kan dit tweede lid dus in den vorm brengen:

$$-\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-xz)}$$

Vervangt men 't eerste lid nog door:

$$\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}-f(x)$$

dan vindt men:

$$f(x)=\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}+\mathcal{E}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{((z))\,(1-xz)}$$

$f(z)$ moet eene eenwaardige analytische functie zijn in 't geheele oneindige gebied. Zijn de residus oneindig in aantal, dan moet op hunne volgorde gelet worden. Ze worden gerangschikt naar de toenemende moduli van de oneindigheidspunten.

Digitized by Google

NOOT III.

We maken gebruik van de definitie:

$$2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{(4n^2\pi^2)^p}=\frac{1}{2^{2p-1}\pi^{2p}}\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^{2p}}=\frac{B_p}{(2p)!}$$

Nemen we:

$$\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1+e^{-x}}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}=$$

$$=\frac{1}{2}\,\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}-\frac{1}{x}=\frac{i}{2}\,bg\,ctg\,\frac{ix}{2}-\frac{1}{x}$$

en verder:

$$\pi\,ctg\,\pi z-\frac{1}{z}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2}$$

dan krijgen we voor:

$$z=\frac{ix}{2\pi}$$

$$\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{x^2+4n^2\pi^2}$$

zoodat dan:

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^2+4n^2\pi^2}=$$

$$=2\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{4n^2\pi^2}-\frac{x^2}{(4n^2\pi^2)^2}+\ldots\ldots\right]$$

voeren we nu de B's in dan komen we tot:

$$\left(\frac{1}{1-e^{-x}}-\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{x}=\frac{B_1}{2!}-\frac{B_2\,x^2}{4!}+\frac{B_3\,x^4}{6!}+\ldots$$

$$\pm\frac{B_n\,x^{2n-2}}{(2n)!}\mp\theta\,\frac{B_{n+1}\,x^{2n}}{(2n+2)!}$$

Digitized by Google

NOOT IV.

1. Soldner gaf in „Théorie et tables d'une nouvelle fonction transcendente" (1809) de volgende formules ter berekening van *li*-functies voor verschillende waarden van x:

$$li\, x^{\pm 1} = C + l.\, l.\, x \pm l.\, x + \frac{(l.\, x)^2}{2.\, 2\,!} \pm \frac{(l.\, x)^3}{3.\, 3\,!} + \ldots \quad (1)$$

$$li(a+x) = li\, a + \frac{x}{l.\, a} - \frac{1.\, a.\, A''}{2\,!\,(l.\, a)^2} y^2 + \frac{2.a\, A'''}{3\,!\,(l.\, a)^3} y^3 - \ldots \quad (2)$$

waar $y = l\left(1 + \frac{x}{a}\right)$; de coëfficienten A worden bepaald door: $A'' = 1$; $A''' = 1.\, A'' - l.\, a$; $A'''' = 2.\, A''' + (l.\, a)^2$

$$A^{\mathrm{v}} = 3.\, A'''' - (l.\, a)^3 \text{ ; enz.}$$

$$li\,(1 \pm x) = C + l.\, x \pm A^{(1)} x - \frac{1}{2} A^{(2)} x^2 \pm \frac{1}{3} A^{(3)} x^3 + \ldots \quad (3)$$

waarin:

$$A^{(n)} = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} A^{(1)} - \frac{1}{n-1} A^{(2)} - \frac{1}{n-2} A^{(3)} - \text{enz.} \ldots \quad (3')$$

In (1) en (3) stelt C de Eulersche constante voor. Door gebruik te maken van deze formules stelde Soldner tafels op voor *li* 0,01 met 0,01 opklimmend tot 1; voor *li* 1 met 0,1 opklimmend tot *li* 2; voor *li* 2 met 1 opklimmend tot *li* 10; voor *li* 10 tot *li* 20; voor *li* 20 met 2 opklimmend tot *li* 40; voor *li* 40 met 5 opklimmend tot *li* 100; voor *li* 100 met 10 opklimmend tot *li* 160; voor *li* 160 met 20 opklimmend tot *li* 320; voor *li* 320 met 40 opklimmend tot *li* 640; voor *li* 640 met 80 opklimmend tot *li* 1280.

Digitized by Google

De *li* functies van de tusschengelegen getallen kunnen bepaald worden door de interpolatieformule:

$$li\,(a+x) - li\,a + 100\,x\triangle' = \frac{100\,x\,(1-100\,x)}{2\,!}\triangle'' + $$
$$+ \frac{100\,x\,(1-100\,x)\,(2-100\,x)}{3\,!}\triangle''' + \text{enz.}$$

waar $\triangle'$ 't eerste verschil is; $\triangle''$ 't tweede verschil, enz. a is het getal, in de tafel voorkomend, dat 't dichtst gelegen is bij 't gegeven getal en x is 't geen 't gegeven getal grooter is.

Op deze wijze *li* te bepalen is zeer tijdroovend. Datzelfde nadeel heeft de berekening door de reeksen van BRETSCHNEIDER (zie Hoofdstuk II, art. 14).

Na het afdrukken, bleek op blz. 104 nog een fout te schuilen. In het tweede lid van de asymptotische gelijkheid, aan 't einde van art. 6, is de factor $e^{\pm ax}$ per ongeluk uitgevallen.

Digitized by Google

STELLINGEN.

Digitized by Google

Digitized by Google

I.

De oplossingswijze, die Forsyth geeft van

$$\frac{d^2y}{dx^2} = Y$$

waar Y een functie van y voorstelt, is onvolledig.

II.

Het is wenschelijk een bepaalde notatie voor de getallen van Bernoulli algemeen aan te nemen.

III.

Wanneer 't doel is een benaderde oplossing van een differentiaalvergelijking te verkrijgen, dan is 't geoorloofd die vergelijking te vereenvoudigen, door termen van sommen, die er in optreden, te vervangen door benaderde waarden (dus soms zelfs weg te laten) wanneer, binnen de grenzen, waarvoor de oplossing beschouwd wordt, 't verschil tusschen de vervangen termen en die benaderde waarden klein is, ten opzichte van de sommen waarvan ze termen zijn.

Digitized by Google

IV.

De oplossing van de vergelijking

$$\frac{dy}{dx} + Py = Q$$

waar P en Q functies van x zijn is eenvoudiger te vinden door te stellen $y = e^u v$, dan door $y = u v$.

V.

De onderverdeeling der reeksen, voorkomende onder **D 2** in den „Index du répertoire bibliographique des sciences mathématiques" is onvolledig.

VI.

Het eenvoudigste elementaire bewijs voor de stelling der onbepaalde coëfficienten is dat, waarbij gebruik gemaakt wordt van de onbepaalde uitdrukking $\frac{0}{0}$.

VII.

Op 't onderscheid tusschen „fout" en „correctie" wordt niet altijd voldoende gelet.

VIII.

$Sin^2 x$ beduidt volgens den vorm eigenlijk $Sin\ (Sin\ x)$. Men behoorde daarom te schrijven $(Sin\ x)^2$.

IX.

Jäger komt ten onrechte tot de conclusie:

„Es sind daher die zwischen die Gasmolekeln wirkende Kräfte, Abstossungskräfte".

(Winkelmann, Handbuch der Phys. Bd II 2. blz. 546).

Digitized by Google

X.

Drukvermeerdering bij condensatie is een waardevol contrôlemiddel bij 't onderzoek naar de zuiverheid van een gas.

XI.

Van 't beginsel der virtueele verplaatsingen is, bij 't onderwijs in de elementaire Mechanica, veel nut te verwachten.

XII.

Het zou wenschelijk zijn de Beschrijvende Meetkunde als vak van onderwijs op H. B. Scholen te vervangen door de Boldriehoeksmeting.

Digitized by Google

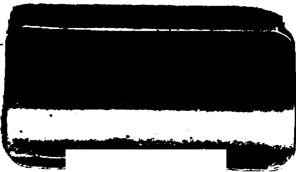
Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google







Digitized by Google

Digitized by Google